Universitatea BABEȘ-BOLYAI
UBBFSEGA
CENTRUL DE FORMARE CONTINUĂ, ÎNVĂȚĂMÂNT LA DISTANȚĂ ȘI CU FRECVENȚĂ REDUSĂ
OIDFR OFICIUL PENTRU ÎNVĂȚĂMÂNT LA DISTANȚĂ ȘI CU FRECVENȚĂ REDUSĂ

SUPORT DE CURS

MATEMATICI APLICATE IN ECONOMIE

ANUL I Semestrul 1

IDFR

UNIVERSITATEA " BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE ŞTIINŢE ECONOMICE ŞI GESTIUNEA AFACERILOR
TRUNCHI COMUN ANUL I ID
SEMESTRUL I

SUPORT DE CURS

Anul I

Semestrul 1

Cluj Napoca

Cuprins

Informaţii generale

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE ŞTIINŢE ECONOMICE ŞI GESTIUNEA AFACERILOR
TRUNCHI COMUN ANUL I zi si ID
SEMESTRUL I

Date de identificare a cursului

Date de contact ale titularilor de curs:

1. Muresan Anton S., Birou: Cabinetul 229, Etajul II, E-mail: anton.muresan@econ.ubbcluj.ro,

2. Curt Paula, Birou: Cabinetul 229, Etajul II, E-mail: paula.curt@econ.ubbcluj.ro,

3. Lung Rodica, Cabinetul 230, Etajul II, E-mail: rodica.lung@econ.ubbcluj.ro

4. Roşca Alin, Cabinetul 231, Etajul II, E-mail: alin.rosca@econ.ubbcluj.ro,

5. Radu Voichita, Cabinetul 230, Etajul II, E-mail: voichita.radu@econ.ubbcluj.ro

6. Filip Darius, Cabinetul 230, Etajul II, E-mail: darius.filip@econ.ubbcluj.ro

7. Coconet Tiberiu, Cabinetul 231, Etajul II, E-mail: tiberiu.coconet@econ.ubbcluj.ro

8. Pop Flaviu, Cabinetul 231, Etajul II, E-mail:flaviu.pop@econ.ubbcluj.ro

Obiective

- Să familiarizeze studenţii cu tehnicile şi metodele matematice utilizate în economie.

- Să introducă noţiuni de analiza funcţiilor reale de mai multe variabile reale care să constituie pentru studenţi instrumente pentru tratarea unor probleme de extrem, pentru a permite ajustarea datelor experimentale, etc.

- Să creeze baze de analiză matematică necesare pentru studiul teoriei probabilităţilor şi pentru statistica matematică.

- Să pună bazele unei gndiri logice şi raţionale att de necesare viitorilor economişti

Competenţe profesionale

- Însuşirea conceptelor de bază şi crearea deprinderii de a le utiliza.
- Capacitatea de a culege, analiza şi interpreta date şi informaţii referitoare la problemele economico-financiare şi statistice.
- Abilitatea de a raţiona, analiza şi investiga fenomene şi procese economice şi de previziuni cu ajutorul metodelor matematice şi statistice.

Competenţe transversale

- Valorificarea eficientă a resurselor şi tehnicilor de nvăţare pentru propria dezvoltare.
- Aplicarea principiilor, normelor şi valorilor eticii profesionale n cadrul propriei strategii de muncă riguroasă, eficientă şi responsabilă.

Conditionari si cunostinte prerechizite: -

Descrierea cursului :

Se vor avea in vedere urmatoarele obiective:

• Introducerea catorva notiuni de analiza functiilor reale de mai multe variabile reale care sa constituie pentru studenti instrumente pentru tratarea unor probleme de extrem, pentru a permite interpolarea si ajustarea datelor experimentale, etc.

• Crearea bazelor de analiza matematica necesare pentru studiul teoriei probabilitatilor si pentru statistica matematica.

• Definirea si studiul principalelor proprietati ale conceptelor de baza din teoria probabilitatilor. Crearea la studenti a unor deprinderi de utilizare a tehnicilor probabilistice si de folosire a acestora in scop aplicativ. Fundamentarea probabilistica a statisticii matematice.

Organizarea temelor (părţilor) in cadrul cursului:

Cursul va avea urmatoarele doua parti:

1. Elemente de analiza matematica
2. Elemente de teoria probabilitatilor

Organizarea temelor s-a facut avand in vederea ordinea fireasca si gradul de dificultate sa urmeze o ordine crescatoare. Informatia relevanta referitoare la fiecare tema (parte) se gaseste in lista bibliografica ce va fi prezentata ulterior, iar accesul va fi realizat direct.

Formatul si tipul activitatilor implicate de curs:

Formatul va fi unul clasic, permitand studentului de a-si gestiona singur, fara constrangeri, parcurgerea cursului. De sigur o participare la activitatile planificate va usura intelegerea tematicii cursului. Tipurile de activitati ce vor fi abordate in cadrul cursului vor fi atat cele clasice cat si proiecte de grup.

Materiale bibliografice obligatorii:

Principalele materiale bibliografice pe care le vom utiliza, si care se vor gasi la biblioteca facultatii, iar unele vor putea fi accesate prin internet, sunt:

1. Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2012.

2. Colectiv, Analiza matematica, Teoria Probabilitatilor si Algebra liniara aplicate in economie, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2008.

Bibliografie completă

1. Dowling E.T., Mathématiques pour l´économiste, McGraw-Hill, Paris, 1990

2. Mureşan A.S., Matematici aplicate în finanţe, bănci şi burse, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, 2000

3. Mureşan A.S., şi colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2011

4. Mureşan A.S., şi colectiv, Analiză matematică, Teoria probabilităţilor şi algebră liniară aplicate în economie, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2007

5. Purcaru I., Matematici generale şi şi elemente de optimizare, Editura Economică, 2004

Materiale si instrumente necesare pentru curs :

Vom folosi: suport electronic de curs, materiale multiplicate, calculator, videoproiector.

Calendarul cursului: este prezentat in calendarul disciplinei

Politica de evaluare si notare:

Evaluarea si notarea finala se va face prin rezolvarea de probleme, intocmirea unor teme de casa. Toate acestea se vor realiza pe parcursul semestrului. Intrarea in examenul final este conditionata de realizarea sarcinilor ce rezulta din temele de control de la sfarsitul fiecarui modul al suportului de curs. Studentii vor primi feed-back la rezultatele realizate in examenul final prin comunicare directa cu cei care solicita. In cazul cand studentul doreste sa revina la un examen de marire a notei, acest nou examen se va desfasura in aceleasi conditii, cu aceleasi cerinte, ca si examenul initial.

Cerinţe pentru examen

Nota la examenul de Matematici aplicate în economie se calculează astfel: maxim **3p referate şi teme pentru acasa, şi maxim 7p nota la examenul scris**. La examenul scris subiectele constau în rezolvarea de probleme. Pentru cele 3 puncte pe teme şi referate trebuie pregătite următoarele două teme (referate teoretice + probleme rezolvate după cum e indicat mai jos):

1. Integrale Euleriene + Rezolvarea problemelor de la Teme de control Modul 1 (maxim 1,5 puncte).
2. Repartiţii clasice ale variabilelor aleatoare (binomială, uniformă, normală, [1, Cap.7]) + Rezolvarea problemelor de la teme de control Modul 2 (maxim 1,5 puncte).

[1] Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2012.

Elemente de deontologie academica:

Pentru a evita situatiile care pun in discutie onestitatea studentilor facem de la inceput precizarea ca se interzice categoric frauda, iar tentativele de frauda se vor trata conform reglementarilor in vigoare elaborate la nivelul facultatii si universitatii. Este normal ca atunci cand se utilizeaza anumite date, texte, formulari, etc. luate din alte surse, sa se faca citarea, si astfel sa se asume meritele doar pentru munca si contributia proprie. Se va cere studentului sa aiba un comprtament academic fata de profesori si fata de colegi.

Studentii cu dizabilitati:

Nu vor avea nici o problema in a se incadra in cerintele cursului si a celorlalte activitati, sansele in pregatire si obligatiile lor fiind de aceeasi factura ca si pentru studentii fara dizabilitati.

Strategii de studiu recomandate:

Recomandam studentilor sa se pregateasca mai intai din aspectele teoretice, asa incat, mai intai, din curs, sa fie studiate modulele cu teoria si exemplele ilustrative formulate, apoi sa se abordeze problemele rezolvate, iar apoi si problemele formulate spre rezolvare. Pentru tot cursul, apreciem ca fondul de timp necesar insusirii complete este de 56 de ore, din care 40 pentru suportul de curs, 8 pentru activitatile directe cu tutorii, iar 12 pentru sarcinile individuale de studiu al bibliografiei si realizarea temelor de control.

Capitolul 1

MODULUL I. Analiza matematica

Obiectivele modulului

- Introducerea catorva notiuni de analiza functiilor reale de mai multe variabile reale care sa constituie pentru studenti instrumente pentru tratarea unor probleme de extrem, pentru a permite interpolarea si ajustarea datelor experimentale, etc.
- Crearea bazelor de analiza matematica necesare pentru studiul teoriei probabilitatilor si pentru statistica matematica.

Concepte de baza

- Spatiul $\mathbb{R}^n$, distanta in $\mathbb{R}^n$, topologia euclidiana in $\mathbb{R}^n$;
- Limite de functii de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$, continuitatea functiilor de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$;
- Derivate partiale, diferentiabilitate si diferentiala pentru functiile de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$, derivate partiale si diferentiale de ordin superior;
- Extremele functiilor reale de mai multe variabile reale (libere sau cu legaturi);
- Ajustarea datelor experimentale;
- Integrale Euler.

Rezultate asteptate

Insusirea conceptelor de baza mentionate si crearea deprinderilor de utilizare a acestora. Studentul trebuie sa fie capabil sa aplice in practica notiunile studiate pentru analizarea unor situatii concrete din economie, cum ar fi de exemplu probleme de gestiunea optima a stocurilor.

UNITATEA 1. Functii reale de mai multe variabile reale

1.1 Funcţii reale de mai multe variabile reale

1.1.1 Spaţiul $\mathbb{R}^n$

În studiul fenomenelor fizice, economice (şi în alte situaţii) apare de mai multe ori necesitatea studiului mulţimilor cu număr fix de numere reale. De exemplu, spaţiul în care trăim este modelat ca o mulţime de puncte determinate de trei coordonate. Fie n un număr natural fixat nenul. Mulţimea sistemelor de forma:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale, se numeşte **spaţiul** $\mathbb{R}^n$. Elementele acestei mulţimi se numesc puncte, iar numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care determină punctul x se numesc coordonatele sau componentele acestui punct.

Pe spaţiul $\mathbb{R}^n$ se pot considera diverse structuri care să extindă structura axei reale.

Pentru orice pereche de elemente x şi y din $\mathbb{R}^n$, există în $\mathbb{R}^n$ suma lor $x + y$ dată de:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{2.1.1}$$

De asemenea, pentru fiecare $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}^n$ există în $\mathbb{R}^n$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n). \tag{2.1.2}$$

Definiţia 1.1.1. *Se numeşte* ***metrică*** *sau* ***distanţă*** *pe mulţimea nevidă X orice aplicaţie*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \ \ (x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

astfel încât:

D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ *şi* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

D2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(inegalitatea triunghiului)*

Cuplul (X, d) unde X este o mulţime nevidă iar d este o metrică (distanţă) pe X se numeşte ***spaţiu metric****.*

Propoziţia 1.1.1. *Aplicaţia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

este o metrică pe $\mathbb{R}^n$ numită ***metrica euclidiană*** *pe $\mathbb{R}^n$.*

Exemplul 1.1.1. *Fie $x = (-1, 3, 1)$ şi $y = (2, 1, -1)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$. Avem:*

$$d(x, y) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{17}.$$

Observaţia 1.1.1. *In cazul normei euclidiene pentru $n = 2$ şi $n = 3$ regăsim formula distanţei dintre două puncte din plan şi din spaţiu. Intr-adevăr dacă $n = 2$ atunci*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

iar dacă $n = 3$ atunci

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Noţiunile de limită şi continuitate se pot introduce în orice spaţiu normat, respectiv metric. In cele ce urmează vom considera spaţiul $\mathbb{R}^n$ înzestrat cu norma euclidiană respectiv metrica euclidiană.

Definiţia 1.1.2. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Aplicaţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

$$A \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

se numeşte **funcţie reală** *de n variabile reale.*

Exemplul 1.1.2. *În multe probleme economice intervin funcţii de tip* ***Cobb - Douglas*** *(denumite astfel după economiştii americani C.V. Cobb şi P.H. Douglas, cărora li se datorează cercetări şi descoperiri în domeniu, în anii 1920). Aceste funcţii au forma generală:*

$$f : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots c x_n^{\alpha_n},$$

unde $C, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0$.

Exemplul 1.1.3. *Dacă V este venitul unei societăţi comerciale, x numărul de ore de muncă productivă prestată, y fondurile fixe angajate în producţie atunci*

$$V(x, y) = k x^\alpha y^\beta, \ k, \alpha, \beta \text{ constante pozitive}$$

(funcţie de producţie de tip Cobb-Douglas) este o funcţie reală de 2 variabile reale.

Exemplul 1.1.4. *Dacă $A = [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^3$ atunci funcţia*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1\, x_2\, x_3$$

(funcţie reală de trei variabile reale) poate reprezenta producţia unei întreprinderi dacă x_1 este productivitatea muncii, x_2 numărul de muncitori, x_3 timpul de muncă.

1.1.2 Derivate parţiale, diferenţiabilitate şi diferenţială

În această secţiune se introduc noţiunile de derivată parţială, diferenţiabilitate şi diferenţială.

Derivatele parţiale ale funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Definiţia 1.1.3. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un domeniu, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Fie $i \in \{1, \ldots, n\}$. Spunem că f este* ***derivabilă parţial în raport cu variabila*** *x_i în punctul a dacă limita*

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}$$

există şi este finită.

Notăm această limită (dacă există) cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ sau } f'_{x_i}(a).$$

Spunem că f este ***derivabilă parţial în raport cu*** *x_i* ***pe*** *D dacă este derivabilă parţial în raport cu x_i în orice punct $a \in D$. Dacă f este derivabilă parţial în raport cu x_i pe D atunci se poate vorbi de funcţia parţiala a lui f în raport cu variabila x_i notată $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ şi anume*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Observaţia 1.1.2. *In cazul $n = 2$ se notează cu (x, y) în loc de (x_1, x_2) punctul curent din $\mathbb{R}^2$,iar în $\mathbb{R}^3$ se notează cu (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3). Aşadar, o funcţie de două variabile $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^2$ este derivabilă parţial în raport cu x, respectiv cu y în punctul $a = (a_1, a_2) \in D$, dacă există şi este finită următoare limită*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x \to a_1} \frac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1}$$

respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{y \to a_2} \frac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2}.$$

Pentru funcţii elementare (polinoame, funcţiile raţionale, trigonometrice, exponenţială, logaritmică şi compuneri ale acestora, etc.) $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x{}'$ se calculează derivând f uzual în raport cu x, considerând y ca parametru, iar $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y{}'$ se calculează derivând f în raport cu y şi considerând x ca parametru.

Exemplul 1.1.5.

1) *Fie $f(x, y) = x^2 + xy$ şi $a = (5, -3)$, $D = \mathbb{R}^2$. In acest caz*

$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim\limits_{x \to 5} \frac{f(x,-3)-f(5,-3)}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-3x-10}{x-5} = \lim\limits_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} = 7$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim\limits_{y \to -3} \frac{f(5,y)-f(5,-3)}{y+3} = \lim\limits_{y \to -3} \frac{5y+15}{y+3} = 5.$

In punctul curent avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$ şi dacă înlocuim $x = 5$, $y = -3$ regăsim valorile anterioare.

2) *Dacă $f(x, y, z) = x^2 + \sin yz$, $D = \mathbb{R}^3$, atunci avem*

$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z \cos yz$,

$\frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) = y \cos yz$.

Definiţia 1.1.4. *Funcţia f se numeşte de* ***clasă*** *C^1**pe** D şi se notează $f \in C^1(D)$ dacă f este derivabilă parţial pe D în raport cu toate variabilele şi plus, funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue pe D.*

Observaţia 1.1.3. ***Productivităţile marginale*** *(şi în general costurile, beneficiile, câştigurile marginale) reprezintă de fapt derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei care ne dă productivitatea (respectiv costul, beneficiul, câştigul etc.)*

Exemplul 1.1.6. *Pentru a ara un teren cu suprafaţa de x_1 ha sunt necesare x_2 ore de muncă pe zi. După x_3 zile de muncă s-au arat y ha de teren. Între aceste variabile există relaţia:*

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^4 x_2 x_3^3.$$

Să se determine productivitatea marginală raportată la suprafaţa terenului, la numărul de ore de muncă pe zi şi respectiv la numărul de zile de muncă.

Rezolvare: În cazul problemei noastre vom avea:
${f_{x_1}}'(x_1, x_2, x_3) = 12x_1^3 x_3 x_3^3$, productivitatea marginală raportată la suprafaţa de teren,
${f_{x_2}}'(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^4 x_3^3$, productivitatea marginală raportată la numărul orelor de muncă / zi,
${f_{x_3}}'(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^4 x_2 x_3^2$, productivitatea marginală raportată la numărul de zile de lucru.

Observaţia 1.1.4. *Tot ca şi aplicaţii ale derivatelor parţiale se definesc:*

$\rho_f^{(x_k)}(x) = \dfrac{{f_{x_k}}'(x)}{f(x)}$ *- **rata de schimbare parţială a lui** f în raport cu x_k,*

$\varepsilon_f^{(x_k)}(x) = \dfrac{x_k\, {f_{x_k}}'(x)}{f(x)}$ *- **elasticitatea parţială a lui** f în raport cu x_k.*

Diferenţiabilitatea funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Definiţia 1.1.5. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este **diferenţiabilă în punctul** a dacă există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega : D \longrightarrow \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ (deci ω continuă şi nulă în a) astfel încât să avem*

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - a_i) + \omega(x) \|x - a\| \;\; \forall\, x \in D. \tag{1.1}$$

*Spunem că f este **diferenţiabilă pe** $A \subset D$ dacă este diferenţiabilă în orice punct din A.*

Propoziţia 1.1.2. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este diferenţiabilă în a atunci f este continuă în a.*

Între diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct şi existenţa derivatelor parţiale în acel punct există următoarea legătură:

Propoziţia 1.1.3. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este diferenţiabilă în a atunci f admite derivate parţiale în a şi*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha_i$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Observaţia 1.1.5.

1) *Rezultatul precedent implică faptul că relaţia de definiţie 1.1 a diferenţiabilităţii devine:*

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \omega(x) \|x - a\|, \quad \forall\, x \in D. \tag{1.2}$$

2) *Reciproca propoziţiei precedente este falsă, adică există funcţii care admit derivate parţiale într-un punct şi totuşi nu sunt diferenţiabile în acel punct.*

Concret, când e nevoie să studiem diferenţiabilitatea unei funcţii într-un punct este necesar să avem cunoscute condiţii suficiente de diferenţiabilitate. Următorul rezultat rezolvă această problemă.

Propoziţia 1.1.4. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dacă există V vecinătate a punctului a astfel încât f are derivate parţiale pe $V \cap D$ şi dacă acestea sunt continue în a atunci f este diferenţiabilă în a.*

Observaţia 1.1.6.

1) *Dacă f admite derivate parţiale continue pe D atunci f este diferenţiabilă pe D.*

2) *Propoziţia precedentă prezintă condiţii suficiente de diferenţiabilitate dar nu şi necesare.*

Diferenţiala funcţiilor reale de mai multe variabile reale

Definiţia 1.1.6. *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, un domeniu $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în a. Se numeşte* ***diferenţială a funcţiei*** *f în punctul a notată $df_{(a)}$, aplicaţia*

$$df_{(a)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad df_{(a)}\left(h\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) h_i. \tag{1.3}$$

Observaţia 1.1.7. **1)** *Fie $D \subset \mathbb{R}^n$,un domeniu $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în a. Atunci există $\omega : D \longrightarrow \mathbb{R}$, ω continuă şi nulă în a astfel încât $\forall\, x \in D$ avem*

$$f\left(x\right) - f\left(a\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)\left(x_i - a_i\right) + \omega\left(x\right) \left\|x - a\right\|.$$

$x_i - a_i$ se numeşte creşterea celui de-al i-lea argument a lui f $\left(i = \overline{1, n}\right)$

- *$x - a = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)$ se numeşte* ***sistem de creşteri*** *ale argumentelor lui f.*
- *$f\left(x\right) - f\left(a\right)$ se numeşte* ***creşterea funcţiei*** *corespunzătoare sistemului de creşteri $x - a$ ale argumentelor.*
- *Pentru x suficient de apropiat de a (adică pentru $\left\|x - a\right\|$ suficient de mică astfel încât cantitatea $\omega\left(x\right)\left\|x - a\right\|$ poate fi neglijată) avem evident $f\left(x\right) - f\left(a\right) \approx df_{(a)}\left(x - a\right)$ adică $df_{(a)}$ aproximează creşterea (sau descreşterea) funcţiei f în a corespunzătoare unui sistem $x - a$ de creşteri ale argumentelor (deci când se trece de la punctul x la punctul a).*

2) *Considerăm funcţiile $\varphi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = x_i$, $1 \le i \le n$.*

Avem: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\left(x\right) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases}$ $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci funcţiile φ_i admit derivate parţiale continue pe $\mathbb{R}^n$ şi prin urmare sunt diferenţiabile în orice punct $a \in \mathbb{R}^n$ şi

$$d\varphi_{i(a)}\left(x - a\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\left(a\right) \cdot \left(x_j - a_j\right) = x_i - a_i,\ i = \overline{1, n}.$$

Pentru simplificarea notaţiilor vom nota $d\varphi_{i(a)} = dx_i$. Cu aceasta relaţia 1.3 se scrie

$$df_{(a)}(x-a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ dx_i.$$

Adesea $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ se identifică cu creşterile argumentelor şi avem

$$df_{(a)}(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\ dx_i.$$

3) *Interpretând produsul simbolic $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ ca fiind derivata parţială a lui f în raport cu x_i în punctul a $\left(i = \overline{1,n}\right)$ se obţine*

$$df_{(a)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right) f(a), \quad a \in D. \tag{1.4}$$

Putem considera astfel operatorul de diferenţiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n. \tag{1.5}$$

Exemplul 1.1.7. *Să se calculeze diferenţiala funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + y - 1$$

Rezolvare: Avem:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y^2;$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy + 1;$

$df_{(x,y)}(dx,dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = (3x^2+2y^2)dx + (4xy+1)dy.$

1.1.3 Derivate parţiale şi diferenţiale de ordin superior

Derivate parţiale de ordin superior

Definiţia 1.1.7. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie ce admite derivate parţiale pe D .*

*Dacă derivata $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, este derivabilă în raport cu variabila x_j, $j = \overline{1,n}$ în punctul $a \in D$, **numim derivată parţială de ordinul al doilea în punctul** a a funcţiei f în raport cu variabilele x_i, x_j (în această ordine) numărul*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a), \tag{2.4.1}$$

Dacă $i \neq j$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ atunci derivata

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \overset{not}{=} f''_{x_i x_j}(a)$$

se numeşte ***derivata mixtă*** *în raport cu variabilele* x_i *şi* x_j.

Dacă $i = j \in \{1, \ldots, n\}$ *atunci vom folosi una dintre notaţiile*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = f''_{x_i^2}(a).$$

In general o funcţie de n variabile reale f are n derivate parţiale de ordin întâi şi n^2 derivate parţiale de ordinul doi.

Exemplul 1.1.8. *Să calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi pentru funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$$

Avem:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = {f_x}'(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = {f_y}'(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right)'_x = \frac{2\left(x^2+y^2+1\right)-2x\,2x}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2\left(-x^2+y^2+1\right)}{(x^2+y^2+1)^2}.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\right)'_y = 2x\left(-\frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}\right) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}.$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)'_y = \frac{2\left(x^2-y^2+1\right)}{(x^2+y^2+1)^2}.$

Se observă că $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. *In general, aceste derivate parţiale de ordinul al doilea nu sunt egale. Următorul criteriu stabileşte condiţii suficiente pentru ca derivatele parţiale mixte să fie egale.*

Teorema 1.1.1. *(Schwarz). Dacă funcţia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, D *domeniu,* $D \subset \mathbb{R}^n$, *are derivate parţiale de ordinul doi mixte* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *şi* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, *într-o vecinătate* V *a punctului* $a \in D$ *şi dacă aceste funcţii derivate parţiale de ordinul doi mixte* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *şi* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *sunt continue în* a *atunci are loc egalitatea:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Propoziţia 1.1.5. *Dacă funcţia* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *are derivate parţiale de ordinul doi mixte* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *şi* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, *pe* D *şi sunt funcţii continue pe* D *atunci ele sunt egale pe* D *adică*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad x \in D.$$

Observaţia 1.1.8. *Condiţia de continuitate a derivatelor mixte este esenţială.*

Derivate parţiale de ordinul 3 Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie ce admite derivate parţiale de ordinul doi pe D . Atunci putem studia existenţa derivatelor parţiale de ordinul 3.

Dacă derivata

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\quad i, j \in \{1, \ldots, n\})$$

este derivabilă în raport cu x_k $(k \in \{1, \ldots, n\})$ în punctul $a \in D$, numim **derivată parţială de ordinul al treilea** în punctul a a funcţiei f în raport cu variabilele x_i, x_j, x_k (în această ordine) numărul

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \stackrel{not}{=} f'''_{x_i x_j x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(a).$$

Dacă cel puţin doi indici dintre i, j, k sunt diferiţi derivata se va numi mixtă. In caz contrar, adică $i = j = k$, se obţine derivata de ordinul 3 în raport cu aceiaşi variabilă x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(a) = f'''_{x_i^3}(a)$.

Concluzia Teoremei lui Schwarz rămâne adevărată şi pentru derivatele parţiale mixte de ordin mai mare ca doi. De fapt, în ipoteza continuităţii acelor funcţii derivate mixte de ordin superior, importantă este nu ordinea în care se face derivarea ci variabilele în raport cu care se face derivarea şi de câte ori se derivează în raport cu o variabilă. De exemplu avem că

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

Exemplul 1.1.9. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dată de* $f(x, y) = x \ln y$

Derivatele parţiale distincte de ordinul doi, trei se calculează astfel:

Calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul întâi

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (x \ln y)'_x = \ln y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x \ln y)'_y = \frac{x}{y}$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi distincte

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln y) = 0$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln y) = \frac{1}{y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \, \partial x}$

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}.$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul trei distincte

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\right) =$
$= \frac{\partial}{\partial y}(0) = 0$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right) =$
$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2x}{y^3}.$

Observaţia 1.1.9. *In mod analog se pot defini derivate parţiale de ordin mai mare ca trei.*

Diferenţiale de ordin superior

In paragraful 1.1.2 a fost introdusă noţiunea de diferenţială a unei funcţii în punctul a, notată $df_{(a)}$.

Aceasta este dată de $df_{(a)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad df_{(a)}(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$

sau dacă notăm cu $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m)$ creşterile argumentelor atunci

$$df_{(a)}(dx) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i.$$

De asemenea, am introdus operatorul de diferenţiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$$

cu ajutorul căruia se poate scrie

$$df_{(a)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f(a).$$

Definiţia 1.1.8. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*

1) *Spunem că f este* ***de două ori diferenţiabilă în punctul*** *a sau că are diferenţială de ordinul doi în a dacă f admite derivate parţiale în raport cu toate variabilele pe o vecinătate V a lui a şi funcţiile derivate parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in 1, \ldots, n$, (considerate pe $V \cap D$) sunt diferenţiabile în a.*

2) *Spunem că funcţia f este* ***diferenţiabilă de k ori în punctul*** *a, sau că are diferenţială de ordinul k în a dacă toate derivatele parţiale de ordinul $k-1$ ale lui f există într-o vecinătate V a lui a şi sunt diferenţiabile în a.*

3) *Spunem că funcţia f este diferenţiabilă de k ori pe domeniul D dacă este diferenţiabilă de k ori în fiecare punct din D.*

Prezentăm în continuare (fără demonstraţie) un rezultat care ne dă condiţii suficiente pentru ca o funcţie să fie de k ori diferenţiabilă într-un punct.

Teorema 1.1.2. *Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.Dacă f are într-o vecinătate V a lui a toate derivatele parţiale de ordinul k şi dacă aceste funcţii derivate parţiale sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă de k ori în a.*

Dacă $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$ şi dacă f este o funcţie de trei ori diferenţiabilă în a atunci

$$d^2 f_{(a_1,a_2)}(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)\; dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\; dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\, dy^2,$$

respectiv

$$\begin{aligned} d^3 f_{(a_1,a_2)}(dx, dy) \quad &= \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)\; dx^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a)\; dx^2 dy + \\ &\quad +3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a)\; dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)\; dy^3. \end{aligned}$$

Diferenţiala de ordinul k în punctul a se defineşte prin egalitatea

$$d^k f_{(a)}(dx) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right]^{(k)} f(a), \tag{1.6}$$

unde $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m)$ iar (k) reprezintă puterea simbolică-formală, după care se dezvoltă suma din paranteză şi apoi se înmulţeşte formal cu $f(a)$.

Relaţia 1.6 pune în evidenţă operatorul de diferenţiere de ordinul k.

$$d^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(k)}$$

care este (formal) puterea de ordinul k a operatorului de diferenţiere de ordinul întâi. Ridicarea la puterea simbolică conduce la expresia:

$$d^k f_{(a)}(dx) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!, k_2!, \ldots, k_n!} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \ldots dx_n^{k_n}.$$

Exemplul 1.1.10. *Scriem diferenţialele de ordinul unu, doi şi trei pentru funcţia:* $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *prezentată în exemplul 1.1.9.*

Diferenţiala de ordinul unu este

$$\begin{aligned} df_{(a_1,a_2)}(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\,dy = \\ &= \ln a_2 dx + \frac{a_1}{a_2}dy. \end{aligned}$$

Diferenţiala de ordinul doi este

$$\begin{aligned} d^2 f_{(a_1,a_2)}(dx, dy) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2)\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a_1, a_2)\,dx\,dy + \\ +\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2)\,dy^2 &= \frac{2}{a_2}dx\,dy - \frac{a_1}{a_2^2}dy^2. \end{aligned}$$

Diferenţiala de ordinul trei va fi

$$d^2 f_{(a_1,a_2)}(dx, dy) = -\frac{3}{a_2^2}dx\,dy^2 + \frac{2a_1}{a_2^3}dy^3.$$

1.2 Extremele funcţiilor de mai multe variabile

Optimizarea matematică se ocupă cu selectarea celui mai bun element dintr-o mulţime de alternative disponibile. În particular, aceasta înseamnă rezolvarea unor probleme în care se caută extremele (maximul sau minimul) unei funcţii reale.

În acest capitol vom studia problema calculului extremelor unei funcţii reale de mai multe variabile reale, precum şi aplicaţii ale acesteia în domeniul economic, precum problema gestiunii stocurilor sau ajustarea datelor experimentale.

1.2.1 Extremele funcţiilor de două variabile

Definiţia 1.2.1. *Fie f o funcţie de două variabile $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $(x_0, y_0) \in D$ un punct interior. Funcţia f* **admite un punct de extrem** *(***maxim** *sau* **minim***) în punctul (x_0, y_0) dacă există o vecinătate V a punctului (x_0, y_0) astfel încât oricare ar fi un punct (x, y) din $V \bigcap D$ să avem*

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq \quad & 0, \quad \textit{pentru } (x_0, y_0) \textit{ punct de maxim;} \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \quad & 0, \quad \textit{pentru } (x_0, y_0) \textit{ punct de minim.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Observaţia 1.2.1. *Punctele de extrem corespunzătoare definiţiei de mai sus sunt* **puncte de extrem local** *(***maxim local** *sau* **minim local***).*

Exemplul 1.2.1. *Fie funcţia de două variabile* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Punctul $(1, 1)$ *este un punct de minim local pentru* f*, deoarece*

$$f(x, y) - f(1, 1) \geq 0$$

pentru orice (x, y) *într-o vecinătate* V *a acestuia. Vom vedea în Exemplul 1.2.3 cum se determină punctul de extrem* $(1, 1)$.

Teorema 1.2.1. ***(Condiţii necesare de extrem local)***
Dacă funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ *are derivatele parţiale de ordinul întâi* f'_x *şi* f'_y *continue pe o vecinătate* V *a unui punct* (x_0, y_0) *interior domeniului* D *şi dacă* (x_0, y_0) *este un punct de extrem local, atunci avem:*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0 \tag{1.8}$$

Demonstraţie. Presupunem că (x_0, y_0) este punct de maxim local. Atunci

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &- f(x_0, y_0) \leq 0 \\ f(x_0, y) &- f(x_0, y_0) \leq 0, \end{aligned}$$

adică funcţiile parţiale (de o singură variabilă)

$$h(x) = f(x, y_0), \; g(y) = f(x_0, y)$$

au în punctele x_0 şi y_0 valori maxime locale. În baza teoremei lui Fermat, derivatele funcţiilor h şi g se anulează în x_0, respectiv în y_0, adică avem

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= f'(x_0, y_0) = 0 \\ g'(y_0) &= f'(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

În mod analog se arată că dacă (x_0, y_0) este un punct de minim local pentru funcţia $f(x, y)$ atunci au loc condiţiile (1.8). □

Definiţia 1.2.2. *Punctele domeniului* D *în care derivatele parţiale* f'_x *şi* f'_y *ale funcţiei* f *se anulează, se numesc* ***puncte critice*** *sau* ***puncte staţionare*** *ale acestei funcţii.*

Exemplul 1.2.2. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

din Exemplul 1.2.1. Calculăm punctele critice ale lui f*. Acestea sunt soluţii ale următorului sistem de ecuaţii*

$$\begin{cases} f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3\left(x^2 - y\right) = 0 \\ f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3\left(y^2 - x\right) = 0. \end{cases}$$

Soluţiile reale ale sistemului sunt (punctele) $(1, 1)$ *şi* $(0, 0)$*, acestea fiind cele două puncte critice ale lui* f*.*

Observaţia 1.2.2. *Natura punctelor staţionare, deci a punctelor din domeniul D ce sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii (1.8), se va preciza prin intermediul condiţiilor suficiente de extrem local, care vor rezulta pe baza Definiţiei 1.2.1.*

Teorema 1.2.2. ***(Condiţii suficiente de extrem local)***

Fie funcţia $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2$. Presupunem că f are derivatele parţiale de ordinul întâi şi doi continue pe o vecinătate V a unui punct (x_0, y_0) interior domeniului D. Dacă (x_0, y_0) este un punct critic (staţionar) al funcţiei f, atunci folosind următoarele notaţii

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),\ D = B^2 - AC.$$

avem următoarele situaţii:

1) *Dacă $D < 0$ şi $A > 0$ atunci (x_0, y_0) este un punct de minim local;*

2) *Dacă $D < 0$ şi $A < 0$ atunci (x_0, y_0) este un punct de maxim local;*

3) *Dacă $D > 0$, atunci (x_0, y_0) nu este un punct de extrem;*

4) *Dacă $D = 0$, atunci studiul naturii punctului staţionar (x_0, y_0) se face cu ajutorul derivatelor parţiale de ordin superior lui doi.*

Exemplul 1.2.3. *Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

din Exemplul 1.2.1 şi 1.2.2. Determinăm extremele funcţiei f.

Natura acestor două puncte staţionare $(1, 1)$ şi $(0, 0)$ ale lui f se va stabili utilizând condiţiile suficiente de extrem. Avem:

$$f''_{x^2} = 6x,\ f''_{y^2} = 6y,\ f''_{xy} = -3.$$

Pentru punctul staţionar $(1, 1)$ avem:

$$f''_{x^2}(1, 1) = 6,\ f''_{y^2}(1, 1) = 6,\ f''_{xy}(1, 1) = -3 \ \text{ şi}$$

$$D = 9 - 36 = -27 < 0,\ A = 6 > 0,$$

deci punctul $(1, 1)$ este un punct de minim, iar

$$f_{\min} = f(1, 1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Pentru punctul staţionar $(0, 0)$ avem $D = 9$ şi deci acest punct nu este un punct de extrem.

1.2.2 Extremele funcţiilor de n variabile $(n \geq 2)$

În cazul funcţiilor de n variabile avem o extindere firească a Definiţiei 1.2.1.

Definiţia 1.2.3. *Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ o funcţie de n variabile reale şi $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ un punct interior lui D. Vom spune că funcţia f* ***admite un punct de maxim local sau minim local*** *în punctul x^0 dacă există o vecinătate V_{x^0} a acestui punct astfel încât să avem*

$$\begin{aligned} f(x) - f\left(x^0\right) &\leq 0, \text{ pentru } x^0 \text{ punct de maxim} \\ f(x) - f\left(x^0\right) &\geq 0, \text{ pentru } x^0 \text{ punct de minim} \end{aligned}$$

pentru orice punct $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_{x^0} \bigcap D$.

Observaţia 1.2.3. *Punctele de extreme definite mai sus sunt puncte de extrem local. Dacă $n = 2$ atunci regăsim definiţiile prezentate în cazul unei funcţii de două variabile. Condiţiile necesare şi suficiente de extrem pentru funcţiile de n variabile vor fi sintetizate în teoremele ce urmează.*

Teorema 1.2.3. ***(Condiţii necesare de extrem)***
Fie f o funcţie definită într-o vecinătate V_{x^0} a punctului $x^0 = \left(x_1^0, \ldots, \ldots, x_n^0\right)$. Dacă acest punct este un punct de extrem al funcţiei f şi dacă în acest punct există derivatele parţiale de ordinul întâi f'_{x_j}, $j = \overline{1,n}$, atunci ele sunt egale cu zero, adică avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x^0\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = 0, \forall j = \overline{1,n}. \tag{1.9}$$

Definiţia 1.2.4. *Punctele în care sunt îndeplinite condiţiile necesare de extrem ale funcţiei f se numesc* **puncte critice** *(sau* **staţionare***) ale funcţiei.*

Exemplul 1.2.4. *Fie funcţia de trei variabile $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z.$$

Calculăm punctele staţionare ale funcţiei f. Avem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 1 = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \\ f'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

care reprezintă condiţiile necesare de extrem ale funcţiei. Rezolvând acest sistem de ecuaţii obţinem doar o soluţie

$$x_0 = -\frac{1}{2},\ y_0 = 0,\ z_0 = 1$$

şi deci găsim punctul staţionar $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Teorema 1.2.4. ***(Condiţii suficiente de extrem)***
Fie f o funcţie de n variabile definită într-o vecinătate V_{x^0} a punctului $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ şi cu derivatele parţiale de ordinul doi continue în vecinătatea V_{x^0}. Dacă x^0 este un punct staţionar al funcţiei f şi

$$d^2 f_{(x^0)}(dx) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(x^0\right) dx_i dx_j > 0 \quad (\text{respectiv } < 0), \forall dx \neq \theta$$

atunci punctul x^0 este un punct de minim local (respectiv punct de maxim local). Dacă $d^2 f_{(x^0)}$ ia valori de semne diferite, atunci punctul x^0 nu este punct de extrem.

Observaţia 1.2.4. *Teorema de mai sus ne arată că pentru a stabili natura punctelor staţionare, deci natura punctelor care sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=f_{x_j}'\left(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right)=0,\quad j=\overline{1,n}$$

trebuie să determinăm diferenţiala de ordinul doi corespunzătoare funcţiei f

$$\begin{aligned} d^2f(dx) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2+\\ &+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n\right)\end{aligned}$$

şi apoi să stabilim semnul ei în care rolul variabilelor este jucat de creşterile $(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n)$, pentru fiecare punct staţionar.

Exemplul 1.2.5. *Fie funcţia de trei variabile $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,*

$$f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2+x-2z$$

din Exemplul 1.2.4. Calculăm diferenţiala de ordinul doi a lui f şi încercăm să-i stabilim semnul.

Calculăm mai întâi derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei:

$$f_{x^2}''=2,\ f_{xy}''=f_{yx}''=0\,f_{xz}''=f_{zx}''=0,\ f_{y^2}''=2,\ f_{yz}''=f_{zy}''=0,\ f_{zz}''=2.$$

Diferenţiala de ordinul doi în punctul staţionar $(x_0,y_0,z_0)=(\frac{1}{2},0,1)$ este

$$\begin{aligned} d^2f_{(x_0,y_0,z_0)}\left(dx,dy,dz\right) &= f_{x^2}''\left(x_0,y_0,z_0\right)dx^2+f_{y^2}''\left(x_0,y_0,z_0\right)dy^2+\\ &+f_{z^2}''\left(x_0,y_0,z_0\right)dz^2+2f_{xy}''\left(x_0,y_0,z_0\right)dxdy+\\ &+2\ f_{xz}''\left(x_0,y_0,z_0\right)dxdz+2\,f_{yz}''\left(x_0,y_0,z_0\right)dydz\\ &= 2dx^2+2dy^2+2dz^2>0.\end{aligned}$$

Conform Teoremei 1.2.4, punctul $(x_0,y_0,z_0)=(\frac{1}{2},0,1)$ este punct de minim local.

Observaţia 1.2.5. *Pentru fiecare punct staţionar x^0 diferenţiala de ordinul doi (3.2.3) poate fi scrisă sub forma matriceală*

$$d^2f_{\left(x^0\right)}(dx)=(dx_1,dx_2,\ldots,dx_n)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}_{|x^0}}_{H(x^0)}\cdot\begin{pmatrix}dx_1\\ dx_2\\ .\\ .\\ .\\ dx_n\end{pmatrix}$$

unde matricea pătratică şi simetrică de ordinul n se numeşte ***matricea hessiană*** *asociată funcţiei f în punctul staţionar x^0 şi se notează $H\left(x^0\right)$.*

Introducând notaţiile

$$a_{sj} = f''_{x_s x_j}\left(x^0\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_j}\left(x^0\right), \quad s, j = \overline{1, n},$$

matricea hessiană $H\left(x^0\right)$ are forma:

$$H\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

care este o matrice simetrică deoarece sunt îndeplinite condiţiile din teorema lui Schwarz, deci avem egalităţile

$$a_{sj} = f''_{x_s x_j} = f''_{xj x_s} = a_{js}, \forall s, j = \overline{1, n}.$$

Notând prin $A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorii principali ai matricei $H(x^0)$, putem formula criteriul lui Sylvester.

Teorema 1.2.5. ***(Criteriul lui Sylvester)***

1) *Dacă minorii principali ai matricei hessiene $H\left(x^0\right)$ sunt pozitivi, adică sunt îndeplinite inegalităţile:*

$$A_1 > 0, \ A_2 > 0, \ A_3 > 0, \dots, A_n > 0, \tag{1.10}$$

atunci punctul staţionar x^0 este un punct de minim al funcţiei f.

2) *Dacă minorii principali ai matricei hessiene $H\left(x^0\right)$ au semne alternate, începând cu semnul minus, deci dacă avem:*

$$A_1 < 0, \ A_2 > 0, \ A_3 < 0, \dots, (-1)^n A_n > 0, \tag{1.11}$$

atunci punctul staţionar x^0 este un punct de maxim al funcţiei f.

Observaţia 1.2.6. *Pentru $n = 2$, deci dacă este vorba de extremele unei funcţii de două variabile f matricea hessiană are forma*

$$H\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2^2} \end{pmatrix}_{|x^0} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Dacă sunt îndeplinite condiţiile (1.10), obţinem

$$A_1 = A = f''_{x_1^2}(x^0\ ) > 0, \quad A_2 = \left(AC - B^2\right) = -D > 0$$

şi deci punctul x^0 este un punct de minim pentru funcţia f.

Dacă sunt îndeplinite condiţiile (1.11), obţinem

$$A_1 = A = f''_{x_1^2}(x^0) < 0, \quad A_2 = \left(AC - B^2\right) = -D > 0$$

şi deci punctul x^0este un punct de maxim pentru funcţia f.

Exemplul 1.2.6. *Fie funcţia de trei variabile* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z$$

din Exemplele 1.2.4 şi 1.2.5. Determinăm extremele funcţiei f *folosind criteriul lui Sylvester.*

Matricea hessiana asociată funcţiei f *în punctul staţionar* $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ *este*

$$H(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece sunt îndeplinite condiţiile

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = 4 > 0, \quad A_3 = 8 > 0,$$

conform cazului **1)** *din criteriul lui Sylvester rezultă că punctul staţionar unic al funcţiei* f *este un punct de minim local pentru funcţia dată şi avem*

$$f_{\min} = f(x_0, y_0, z_0) = f\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) = -\frac{9}{4}.$$

1.2.3 Ajustarea datelor experimentale

Să presupunem că într-un proces concret participă două mărimi măsurabile ale căror valori să fie notate cu x şi y. Dependenţa dintre cele două mărimi poate fi descrisă de o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu ajutorul relaţiei $y = f(x)$. Determinarea funcţiei f este o problemă centrală în orice ştiinţă experimentală. Informaţii utile în rezolvarea acestei probleme sunt perechi de valori determinate experimental pentru cele două mărimi, dar şi cunoaşterea tipului dependenţei respective.

Valorile determinate experimental sunt în mod obiectiv afectate de erori de măsurare. Recunoaşterea acestui fapt subliniază importanţa cunoştinţelor teoretice despre procesul în discuţie.

În cele ce urmează vom considera un procedeu de determinare a unor funcţii care să constituie aproximări acceptabile pentru funcţia f **numite ajustarea datelor experimentale**.

În ajustarea datelor experimentale se acceptă că dependenţa este de un anumit tip (de exemplu $y = P_m(x)$, unde P_m este o funcţie polinomială de grad cel mult m) şi se caută acea dependenţă care „ajustează” cel mai bine valorile determinate experimental.

În continuare, pentru a folosi limbajul uzual în teoria aproximării, vom utiliza termenul de polinom şi când este vorba de funcţie polinomială.

Metoda celor mai mici pătrate

Să presupunem că legile teoretice care guvernează procesul în care apar cele două mărimi măsurabile ne asigură că dependenţa dintre aceste două mărimi este descrisă de relaţia $y = f(x)$, unde $f \in \mathcal{F}$, unde $\mathcal{F}$ este o clasă precizată de funcţii reale de o variabilă reală. Se pune atunci problema determinării acelei funcţii f din clasa $\mathcal{F}$ care dă cât mai bine dependenţa lui y de x în procesul concret respectiv.

Să admitem că n observaţii experimentale asupra procesului respectiv dau pentru x şi y valorile din tabelul următor:

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Problema pusă revine la determinarea funcţiei f din clasa $\mathcal{F}$ ale cărei valori în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ „să se apropie cât mai mult” de datele determinate experimental.

O măsură a „apropierii” funcţiei f de datele experimentale este

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2.$$

Definiţia 1.2.5. *Determinarea funcţiei f din clasa $\mathcal{F}$ pentru care expresia*

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2$$

are cea mai mică valoare posibilă se numeşte ***ajustarea datelor experimentale*** *din tabelul*

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

cu ***metoda celor mai mici pătrate****.*

În cele ce urmează vom considera cazul când $\mathcal{F}$ este clasa funcţiilor polinomiale de grad cel mult m în nedeterminata x, adică

$$\mathcal{F} = \left\{P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m |\ a_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{0, m}\right\}.$$

A determina funcţia f revine atunci la a determina coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Notăm

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2.$$

Problema pusă se reduce atunci la problema determinării punctului de minim al funcţiei F, de unde şi numele metodei.

Punctele staţionare ale funcţiei F sunt soluţiile sistemului

$$F'_{a_j}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 0, \quad j = \overline{0, m}.$$

Efectuând calculele şi făcând următoarele notaţii

$$s_l = \sum_{i=1}^{n} x_i^l \quad \text{şi} \quad t_l = \sum_{i=1}^{n} x_i^l y_i,$$

se ajunge la

$$F'_{a_j}(a_0, a_1, \ldots, a_m) = 2\left[\sum_{k=0}^{m} s_{k+j} a_k - t_j\right],$$

astfel încât sistemul care dă punctele staţionare ale funcţiei F este

$$\sum_{k=0}^{m} s_{k+j} a_k = t_j, \quad j = \overline{0, m},$$

adică

$$\begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + \cdots + s_ma_m = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + \cdots + s_{m+1}a_m = t_1 \\ \ldots \\ s_ma_0 + s_{m+1}a_1 + \cdots + s_{2m}a_m = t_m. \end{cases}$$

Acest sistem este numit **sistemul normal**.

Sistemul normal poate fi scris dacă se cunosc sumele $s_0, s_1, \ldots, s_{2m}$ şi sumele $t_0, t_1, \ldots, t_m$. Aceste sume pot fi determinate completând tabelul următor

	x_i^0	x_i^1	x_i^2	$\cdots$	x_i^{2m}	$x_i^0 y_i$	$x_i^1 y_i$	$\cdots$	$x_i^m y_i$
	1	x_1	x_1^2		x_1^{2m}	y_1	x_1y_1		$x_1^m y_1$
	1	x_2	x_2^2		x_2^{2m}	y_2	x_2y_2		$x_2^m y_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	1	x_n	x_n^2		x_n^{2m}	y_n	x_ny_n		$x_n^m y_n$
$\sum$	s_0	s_1	s_2	$\cdots$	s_{2m}	t_0	t_1	$\cdots$	t_m

în care coloanele x_i^1 şi $x_i^0 y_i$ sunt date de tabelul de date experimentale

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

restul coloanelor se pot determina uşor, (0^0 va fi interpretat 1), iar în ultima linie figurează sumele elementelor din cele n linii precedente.

Ţinând cont de faptul că $s_l = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^l$, $l = \overline{0, 2m}$, se poate arăta că determinantul sistemului normal este diferit de zero, adică

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

deci sistemul normal este un sistem compatibil determinat.

Fie $(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m)$ soluţia unică a sistemului normal. Atunci punctul $(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m)$ este punctul staţionar unic al funcţiei F.

Având în vedere că F este o sumă de pătrate:

$$F(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2,$$

se poate arăta că dacă F are un punct de extrem finit atunci el este punct de minim şi că punctul staţionar $(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m)$ este întotdeauna punctul de minim al funcţiei F.

În acest fel, etapa a doua a procedeului de determinare a extremelor funcţiei F nu mai trebuie parcursă şi deci polinomul (de grad cel mult m) care ajustează în sensul metodei celor mai mici pătrate datele experimentale considerate este

$$P_m(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \overline{a}_2 x^2 + \cdots + \overline{a}_m x^m.$$

Observaţia 1.2.7. *Dacă $m = 1$, în locul expresiei „să se determine polinomul de ajustare de grad cel mult unu", se mai utilizează expresia „să se ajusteze cu o dreaptă", iar dacă $m = 2$, în locul expresiei „să se determine polinomul de ajustare de grad cel mult doi", se mai utilizează expresia „să se ajusteze cu o parabolă". Aceste exprimări se bazează pe faptul că imaginea geometrică a unui polinom de gradul întâi este o dreaptă, iar imaginea geometrică a unui polinom de gradul doi este o parabolă.*

Exemplul 1.2.7. *Să se ajusteze cu o dreaptă şi cu o parabolă datele experimentale din tabelul*

x	-1	0	1	2
y	-3	1	0	3

1. Pentru ajustarea cu o dreaptă,

$$m = 1,\ f = a_0 + a_1 x,\ \begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 = t_1 \end{cases}$$

2. Pentru ajustarea cu o parabolă,

$$m = 2, f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 = t_1 \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 = t_2 \end{cases}$$

Pentru calcularea valorilor s_0, s_1, s_2, s_3, t_0, t_1 şi t_2, folosim tabelul

x_i^0	x_i^1	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
1	-1	1	-1	1	-3	3	-3
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0
1	2	4	8	16	3	6	12
4	2	6	8	18	1	9	9
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2

1. Pentru $m = 1$, $f = a_0 + a_1 x$ şi sistemul normal este: $\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = 1 \\ 2a_0 + 6a_1 = 9 \end{cases}$

Soluţia unică a sistemuluieste $(\overline{a}_0, \overline{a}_1) = (-\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$.
Polinomul de ajustare de grad cel mult 1 este

$$P(x) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5}x.$$

Dreapta de ajustare are ecuaţia: $y = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5}x$.
2. Pentru $m = 2$, $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ şi sistemul normal este

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 1 \\ 2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 9 \\ 6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 9 \end{cases}$$

Soluţia sistemului: $(\overline{a}_0, \overline{a}_1, \overline{a}_2) = (-\frac{7}{20}, \frac{39}{20}, -\frac{1}{4})$.
Parabola de ajustare are ecuaţia

$$y = -\frac{7}{20} + \frac{39}{20}x - \frac{1}{4}x^2.$$

Observaţia 1.2.8. *În aplicaţii se utilizează, pe lângă funcţiile polinomiale, şi funcţiile exponenţiale, logaritmice, trigonometrice, etc. Evident, în asemenea cazuri sistemul normal este altul mai complicat şi mai dificil de rezolvat.*

1.3 Integrale Euleriene

Sub denumirea de integrale euleriene vom studia trei integrale improprii des folosite în teoria probabilităţilor şi în diverse alte domenii ale matematicii aplicate.

1.3.1 Integrala lui Euler de speţa întâi. Funcţia beta

Definiţia 1.3.1. *Se numeşte* ***integrala lui Euler de speţa întâi*** *integrala*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

care pentru $p < 1$ este o integrală improprie având ca punct critic pe 0 şi pentru $q < 1$ este o integrală improprie având ca punct critic pe 1.

Observaţia 1.3.1. *Integrala improprie*

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă dacă $p > 0$ şi $q > 0$ şi este divergentă în celelalte cazuri. De fapt dacă $p \geq 1$ şi $q \geq 1$ atunci ea este o integrală propriu-zisă (proprie).

Definiţia 1.3.2. *Funcţia reală de două variabile reale $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

se numeşte ***funcţia lui Euler de speţa întâi*** *sau* ***funcţia beta****.*

Proprietăţi ale funcţiei Beta

(B1) $B(p, 1) = \dfrac{1}{p}$

Într-adevăr,

$$B(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{1-1}dx = \int_0^1 x^{p-1}dx = \left.\frac{x^\alpha}{p}\right|_0^1 = \frac{1}{p}.$$

În particular, pentru $p = 1$ se obţine

$$B(1,1) = 1.$$

(B2) $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi.$

Într-adevăr, avem

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}dx,$$

integrală pe care o putem calcula utilizând substituţia lui Euler

$$\sqrt{x(1-x)}=tx,$$

de unde se găseşte

$$x=\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

şi deci $\varphi'(t)=\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$.

Pentru ca $x=0$ trebuie ca $t=\infty$ şi pentru ca $x=1$ trebuie ca $t=0$.

Deci

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}dx=\int_\infty^0\frac{1}{t\,.\,\frac{1}{1+t^2}}\frac{-2t}{(1+t^2)^2}dt=-2\int_\infty^0\frac{1}{1+t^2}dt=$$
$$=2\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt=2\operatorname{arctg}t\,|_0^\infty=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi.$$

(B3) $B(p,q)=B(q,p)$.

Într-adevăr, avem

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

din care, făcând substituţia $x=\psi(t)=1-t$ se obţine

$$B(p,q)=\int_0^1(1-t)^{p-1}(1-(1-t))^{q-1}(1-t)'dt=$$
$$=-\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=$$
$$=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx=B(q,p).$$

(B4) Dacă $p>1$ atunci

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q).$$

Într-adevăr, dacă integrăm prin părţi punând

$$f(x) = x^{p-1} \quad \text{şi} \quad g'(x) = (1-x)^{q-1}$$

obţinem

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = x^{p-1}q \left. \frac{-(1-x)^q}{q} \right|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 (p-1)x^{p-2} \,.\, \frac{-(1-x)^q}{q} dx =$$

$$= \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2}(1-x)^q dx =$$

$$= \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2}(1-x)(1-x)^{q-1} dx =$$

$$= \frac{p-1}{q} \int_0^1 (x^{p-2} - x^{p-1})(1-x)^{q-1} dx =$$

$$= \frac{p-1}{q} \int_0^1 [x^{p-2}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}] dx =$$

$$= \frac{p-1}{q} \left[\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1}dx - \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \right] =$$

$$= \frac{p-1}{q} \left[B\left(p-1,q\right) - B\left(p,q\right) \right].$$

Deci am obţinut egalitatea

$$B(p,q) = \frac{p-1}{q} \left[B\left(p-1,q\right) - B\left(p,q\right) \right],$$

din care se obţine imediat

$$B(p,q) = \frac{p-1}{p+q-1} B\left(p-1,q\right).$$

Menţionăm că ipoteza $p > 1$ este necesară pentru ca $p - 1 > 0$ şi deci $B(p-1,q)$ să existe.

Proprietatea (B4) demonstrată aici permite micşorarea cu o unitate a primului argument al funcţiei B. Ea poate fi utilizată succesiv atâta timp cât primul argument rămâne pozitiv.

(B5) Dacă $q > 1$ atunci

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p,q-1).$$

Această proprietate rezultă uşor din proprietăţile (B4) şi (B3). Într-adevăr, avem succesiv

$$B(p,q)=B(q,p)=\frac{q-1}{p+q-1}B(q-1,p)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1).$$

Proprietatea (B5) permite micşorarea cu o unitate a celui de al doilea argument al funcţiei B. Ea poate fi de asemenea utilizată succesiv atâta timp cât al doilea argument rămâne pozitiv.

Observăm astfel că prin utilizarea convenabilă a proprietăţilor (B4) şi (B5) se poate calcula $B(p,q)$ pentru $p>1$ şi $q>1$ dacă se cunoaşte $B(\{p\},\{q\})$, unde $\{x\}$ notează partea fracţionară a lui x.

Există tabele cu valori ale lui $B(p,q)$ pentru $0<p\le 1$ şi $0<q\le 1$.

Exemplul 1.3.1. *Exemplu de utilizare a proprietăţilor (B4) şi (B5):*

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1}B\left(\frac{3}{2}-1,\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{6}B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-1}B\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}-1\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1}B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}-1\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi=\frac{1}{16}\pi.$$

(B6) Dacă $m\in\mathbb{N}^*$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ atunci

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Această relaţie rezultă din utilizări succesive ale proprietăţilor (B4) şi (B5). De exemplu:

$$B(5,4)=\frac{4!\cdot 3!}{8!}=\frac{1}{280}.$$

(B7) Dacă $0<p<1$ atunci

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Omitem aici demonstrarea acestei proprietăţi. Din (B7) se obţine imediat (B2) luând $p=\dfrac{1}{2}$

$$B\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

1.3.2 Integrala lui Euler de speţa a doua. Funcţia gama

Definiţia 1.3.3. *Se numeşte* ***integrala lui Euler de speţa a doua*** *integrala*

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx,$$

care este o integrală improprie (având limita superioară de integrare ∞) şi în plus dacă $a < 1$ are punct critic şi pe 0.

Observaţia 1.3.2. *Integrala improprie $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ este convergentă dacă $p > 0$ şi este divergentă dacă $p \leq 0$.*

Definiţia 1.3.4. *Funcţia reală de o variabilă reală $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx.$$

se numeşte ***funcţia lui Euler de speţa a doua*** *sau* ***funcţia gama****.*

Proprietăţi ale funcţiei Gama

(Γ1) $\Gamma(1) = 1$.

Într-adevăr, avem

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\big|_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

($\boldsymbol{\Gamma}$2) Dacă $p > 1$, atunci

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Într-adevăr, dacă integrăm prin părţi punând $f(x) = x^{p-1}$ şi $g'(x) = e^{-x}$, avem succesiv

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = x^{p-1}\left(-e^{-x}\right)\big|_0^\infty -$$

$$-\int_0^\infty (p-1)x^{p-2}(-e^{-x})dx = -\left.\frac{x^{p-1}}{e^x}\right|_0^\infty +$$

$$+(p-1)\int_0^\infty x^{p-2}e^{-x}dx = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Menţionăm că ipoteza $p > 1$ este necesară pentru a exista $\Gamma(p-1)$.

Proprietatea Γ2) permite micşorarea cu o unitate a argumentului funcţiei gama. Prin utilizări succesive ale acestei proprietăţi, calculul lui $\Gamma(p)$ pentru $p > 1$ poate fi redus la calculul lui $\Gamma(\{p\})$.

Există tabele cu valori ale funcţiei gama pentru $0 < p \leq 1$.

($\mathbf{\Gamma}$3) Dacă $m \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

Proprietatea Γ3) sugerează faptul că funcţia gama este o generalizare a factorialului.

Observaţia 1.3.3. *Dacă în proprietatea B6) a funcţiei beta,*

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

utilizăm în locul factorialului valori ale funcţiei gama date de proprietatea Γ3) *obţinem*

$$B(m,n) = \frac{\Gamma\,(m)\,\Gamma\,(n)}{\Gamma\,(m+n)},\ \forall\ m,n \in \mathbb{N}^*.$$

($\mathbf{\Gamma}$4) Această relaţie dintre funcţiile beta şi gama rămâne adevărată şi pentru argumente reale, adică are loc proprietatea

$$B(p,q) = \frac{\Gamma\,(p)\,\Gamma\,(q)}{\Gamma\,(p+q)},\ \forall\ p > 0 \ \text{ şi } \ \forall\ q > 0$$

cunoscută sub denumirea de **relaţia lui Euler**.

($\mathbf{\Gamma}$5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Într-adevăr, dacă în relaţia lui Euler luăm $a = b = \dfrac{1}{2}$, obţinem

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Dar $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \pi$, iar $\Gamma(1) = 1$, deci

$$\pi = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

din care rezultă $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1.3.3 Integrala Euler-Poisson

Definiţia 1.3.5. *Integrala improprie*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

se numeşte ***integrala Euler-Poisson****.*

Observaţia 1.3.4. *Prin calcule elementare se găsesc următoarele rezultate*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

1.4 Exerciţii şi probleme rezolvate

Problema 1.4.1. *Folosind definiţia să se calculeze* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ *în punctele precizate, pentru funcţia de mai jos:*
$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy,\ (2,1)$

Rezolvare. $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x,1)-f(2,1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\left(x^2+1+x\right)-(4+1+2)}{x-2} =$
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$
$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \lim\limits_{y\to 1} \frac{f(2,y)-f(2,1)}{y-1} = \lim\limits_{y\to 1} \frac{\left(4+y^2+2y\right)-(4+1+2)}{y-1} =$
$\lim\limits_{y\to 1} \frac{y^2+2y-3}{y-1} = \lim\limits_{y\to 1}(y+3) = 4$

Problema 1.4.2. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi pentru următoarele funcţii:*
a) $f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2 - 3axy$
b) $f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{y}{x}$
c) $f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$
(D este domeniul maxim de definiţie.)

Rezolvare. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2+y^2-3axy)'_x = 2x - 3ay$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+y^2-3axy)'_y = 2y - 3ax$
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}$
c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)'_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$

Problema 1.4.3. *Pentru a recolta căpşunile de pe un teren cu suprafaţa de x_1 ha sunt necesare x_2 ore de muncă pe zi. După x_3 zile de muncă s-au recoltat y kg de căpşuni. Între aceste variabile există relaţia:*

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 x_2 x_3^3.$$

Să se determine productivitatea marginală raportată la suprafaţa terenului, la numărul de ore de muncă pe zi şi respectiv la numărul de zile de muncă.

Rezolvare:

Productivităţile marginale (şi în general costurile, beneficiile, câştigurile marginale) reprezintă de fapt derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei care ne dă productivitatea (respectiv costul, beneficiul, câştigul etc.)

În cazul problemei noastre vom avea:
$f_{x_1}{}'(x_1,x_2,x_3) = 10x_1x_2x_3^3$, productivitatea marginală raportată la suprafaţa de teren,
$f_{x_2}{}'(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2x_3^3$, productivitatea marginală raportată la numărul orelor de muncă / zi,
$f_{x_3}{}'(x_1,x_2,x_3) = 15x_1^2x_2x_3^2$, productivitatea marginală raportată la numărul de zile de lucru.

Problema 1.4.4. *Se consideră funcţia de producţie de tip Cobb-Douglas*

$$f(x_1,x_2) = 5x_1^2x_2^3 \quad (x_1, x_2 \geq 0).$$

Să se determine ratele de schimbare parţiale şi elasticităţile parţiale ale lui f.

Rezolvare:
Pentru o funcţie $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se definesc:
$\rho_f^{(x_k)}(x) = \dfrac{f_{x_k}'(x)}{f(x)}$ - *rata de schimbare parţială a lui* f *în raport cu* x_k,
respectiv
$\varepsilon_f^{(x_k)}(x) = \dfrac{x_k\, f_{x_k}'(x)}{f(x)}$ - *elasticitatea parţială a lui* f *în raport cu* x_k.
(Semnificaţia economică a acestor mărimi va fi studiată la alte discipline.)
În cazul nostru:

$$\rho_f^{(x_1)}(x) = \frac{f_{x_1}'(x)}{f(x)} = \frac{\left(5x_1^2x_2^3\right)'_{x_1}}{5x_1^2x_2^3} = \frac{10x_1x_2^3}{5x_1^2x_2^3} = \frac{2}{x_1}$$

$$\rho_f^{(x_2)}(x) = \frac{f_{x_2}'(x)}{f(x)} = \frac{\left(5x_1^2x_2^3\right)'_{x_2}}{5x_1^2x_2^3} = \frac{15x_1^2x_2^2}{5x_1^2x_2^3} = \frac{3}{x_2}$$

sunt ratele de schimbare parţiale, iar

$$\varepsilon_f^{(x_1)}(x) = \frac{x_1\, f_{x_1}'(x)}{f(x)} = \frac{x_1\cdot 10x_1x_2^3}{5x_1^2x_2^3} = 2$$

$$\varepsilon_f^{(x_2)}(x) = \frac{x_2\, f_{x_2}'(x)}{f(x)} = \frac{x_2\cdot 15x_1^2x_2^2}{5x_1^2x_2^3} = 3$$

sunt elasticităţile parţiale ale lui f.
Se observă că aceste elasticităţi sunt egale cu exponenţii variabilelor x_1, respectiv x_2 din expresia funcţiei f. Aceasta nu este o coincidenţă, ci o proprietate a funcţiilor Cobb-Douglas. Astfel, pentru funcţia Cobb-Douglas

$$y = f(x_1,x_2) = Cx_1^{\alpha}x_2^{\beta},$$

semnificaţiile sunt următoarele:

x_1 - capitalul (poate fi notat cu K);
x_2 - forţa de muncă (poate fi notată cu L);
y - producţia;
C - factor rezidual;
α, β - elasticităţile lui y relativ la x_1, respectiv x_2.

Problema 1.4.5. *Să se scrie diferenţialele de ordinele unu, doi şi trei pentru funcţia* $f(x,y) = \ln(xy)$ *cu* $xy > 0$

Rezolvare. Derivatele partiale sunt:
$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y}$
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$
$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} = \frac{2}{y^3}$
Diferenţiala de ordinul intai este: $df_{(x,y)}(dx,dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$
Diferenţiala de ordinul doi este:

$d^2f_{(x,y)}(dx,dy) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 = -\frac{1}{x^2}dx^2 - \frac{1}{y^2}dy^2$

Diferenţiala de ordinul trei va fi:

$d^3f_{(x,y)}(dx,dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(3)} f(x,y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 +$
$+\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dy^3 = \frac{2}{x^3}dx^3 + \frac{2}{y^3}dy^3$

Problema 1.4.6. *O fabrică produce două tipuri de bunuri. Costul producerii acestor bunuri este dat prin funcţia $f(x,y)$, unde x şi y reprezintă cantităţile produse din fiecare tip de produs. Să se minimizeze costul când*

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 100.$$

Rezolvare. Pentru început determinăm punctele staţionare.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 9y = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$$

Soluţiile sistemului, adică $(0,0)$ şi $(3,3)$, vor fi punctele staţionare ale funcţiei f. Derivatele parţiale de ordinul doi vor fi

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -9, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y$

şi deci diferenţialele de ordinul doi calculate în punctele staţionare vor fi

$d^2f_{(0,0)}(dx,dy) = -18dxdy$

şi $d^2f_{(3,3)}(dx,dy) = 18dx^2 - 18dxdy + 18dy^2$

Matricea asociată primei diferenţiale de ordinul doi este $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$

Folosind această matrice putem afirma că punctul staţionar $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

Matricea asociată celei de-a doua diferenţiale este

$$A = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_1+L_2 \to L_2}{\backsim} \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 0 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}C_1+C_2 \to C_2}{\backsim} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} = D.$$

Din forma matricei D rezultă că forma pătratică asociată celei de-a doua diferenţiale este pozitiv definită. Deci punctul staţionar $(3,3)$ este un punct de minim local. Valoarea minimă a costului este $f_{min} = f(3,3) = 73$.

Problema 1.4.7. *Fie datele numerice*

x	-1	0	1	2
y	2	1	2	11

Să se ajusteze aceste date numerice:
a) printr-un polinom de gradul întâi (o dreaptă)
b) printr-un polinom de gradul doi (o parabolă)

Rezolvare. a) Avem gradul polinomului $m = 1$, deci pentru scrierea sistemului normal trebuie calculate sumele s_0, s_1, s_2 şi sumele t_0 şi t_1.

	x_i^0	x_i^1	x_i^2	$x_i^0 y_i$	$x_i^1 y_i$
	1	-1	1	2	-2
	1	0	0	1	0
	1	1	1	2	2
	1	2	4	11	22
$\sum$	4	2	6	16	22

Deci $s_0 = 4$, $s_1 = 2$, $s_2 = 6$, $t_0 = 16$ şi $t_1 = 22$. Sistemul normal este:

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = 16 \\ 2a_0 + 6a_1 = 22 \end{cases}$$

Soluţia unică a acestui sistem este: $\overline{a}_0 = \frac{13}{5}$, $\overline{a}_1 = \frac{14}{5}$

Atunci polinomul de ajustare de grad cel mult unu este $P_1(x) = \frac{13}{5} + \frac{14}{5}x$,iar dreapta de ajustare este dreapta de ecuaţie $y = \frac{13}{5} + \frac{14}{5}x$.

b) Având $m = 2$, pentru scrierea sistemului normal vom calcula sumele $s_0 = 4$, $s_1 = 2$, $s_2 = 6$, $s_3 = 8$, $s_4 = 18$, $t_0 = 16$, $t_1 = 22$, $t_2 = 48$.

Sistemul normal va fi: $\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 16 \\ 2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 22 \\ 6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 48 \end{cases}$

ce admite soluţia unică $\overline{a}_0 = \frac{1}{10}$, $\overline{a}_1 = \frac{3}{10}$, $\overline{a}_2 = \frac{25}{10}$.Polinomul de ajustare de grad cel mult 2 este $P_2(x) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}x + \frac{25}{10}x^2$ iar parabola de ajustare este parabola de ecuaţie: $y = 0,1 + 0,3x + 2,5x^2$

Problema 1.4.8. *Să se calculeze valorile funcţiilor lui Euler:*

a) $\Gamma(6)$, *b)* $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$, *c)* $B(3,5)$, *d)* $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, *e)* $B\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$

Soluţie:

a) $\Gamma(6) = 5! = 120$

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-1\right) =$
$\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

c) $B(3,5) = \frac{(3-1)!(5-1)!}{(3+5-1)!} = \frac{2!\,4!}{7!} = \frac{48}{5040} = \frac{1}{105}$

d) $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1!} = \frac{\pi}{2}$

e) $B\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right) = \frac{\frac{7}{4}-1}{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-1}$ $B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{1}$ $B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

Problema 1.4.9. *Folosind integralele euleriene să se calculeze integralele:*

a) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, *b)* $\int_2^\infty x\,e^{2-x}dx$, *c)* $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}dx$.

Soluţie:

a) Facem schimbarea de variabilă $\frac{x-a}{b-a} = t$, $dx = (b-a)\,dt$

Limitele de integrare: $\left\{ \begin{array}{l} x = a, \Rightarrow t = 0 \\ x = b, \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\}$

Deci, $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^1 \frac{(b-a)dt}{\sqrt{(b-a)t(b-a)(1-t)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} =$
$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$

b) Facem schimbarea de variabilă

$x-2=t \;\Rightarrow dx=dt$ Obţinem astfel:
$\int_2^{\infty} xe^{2-x}dx = \int_0^{\infty}(t+2)\,e^{-t}dt = \int_0^{\infty} te^{-t}dt + 2\int_0^{\infty} e^{-t}dt = \Gamma(2)+\Gamma(1) = 1! + 2\;1 = 3$
c) Facem schimbarea de variabilă
$x^2 = \frac{t}{1-t},\; dx = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)^2}dt$
$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{6}}}{1+\frac{t}{1-t}}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)^2}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{6}+1+\frac{1}{2}-2}dt$
$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{-\frac{2}{3}}dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$

1.5 Teme de control

1. Fie dreptele $-26x+7y=-56$, $\frac{1}{4}x+17y=-8$, $6x-13y=126$, $-5x-\frac{1}{2}y=55$, $-13x+19y=-39$. Găsiţi pantele şi interpretaţi rezultatele. Aflaţi punctele de intersecţie cu axele de coordonate.

   Răspuns. $m_1=\frac{26}{7}, A\left(-\frac{28}{13},0\right), B(0,-8), m_2=-\frac{1}{68}, A(-32,0), B\left(0,-\frac{8}{17}\right), m_3=\frac{6}{13}, A(21,0), B\left(0,-\frac{126}{13}\right),$ $m_4=-\frac{5}{2}, A(-11,0), B(0,-110), m_5=\frac{13}{19}, A\left(\frac{39}{13},0\right), B\left(0,-\frac{39}{13}\right)$

2. Scrieţi ecuaţiile dreptelor pentru care folosim formula "punct-pantă": m=3 şi $(8,-5)\in$ dr., m=1/2 şi $(-10,12)\in$ dr., m=-5 şi $(3,-11)\in$ dr., m=4/9 şi $(0,-6)\in$ dr., m=-2/3 şi $(0,49)\in$ dr., m=23.5 şi $(0,-70)\in$ dr.

   Răspuns. $y=3x-29$, $y=\frac{x}{2}+17$, $y=-5x+4$, $y=\frac{4}{3}x-6$, $y=-\frac{2}{3}x+49$, $y=23,5x-70$

3. Scrieţi ecuaţiile dreptelor care trec prin următoarele 2 puncte: $(-1,10)$ şi $(4,-5)\in$ dr., $(-6,-3)$ şi $(9,7)\in$ dr., $(4,-5)$ şi $(10,-8)\in$ dr.

   Răspuns. $y=-3x+7$, $y=\frac{2}{3}x+1$, $y=-\frac{x}{2}-3$

4. Determinaţi valoarea maximă şi / sau minimă a funcţiilor:

   a) Cost marginal $C_M(x)=200-24x+x^2$
   b) Cost total $C_T(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+14x+22$

   Răspuns. $a)C_{min}=C_M(12)=56$, $b)C_{min}=C_T(7)=\frac{83}{6}$, $C_{max}=C_T(2)=\frac{104}{3}$

5. Fie funcţia cerere în raport cu preţul unitar, iar a şi b sunt parametrii reali :

   (a) $Q=\frac{a-p}{b}$
   (b) $Q=\frac{a-\sqrt{p}}{b}$

(c) $Q = a \cdot \ln \dfrac{b}{p}$

(d) $Q = \dfrac{53 - p^2}{75}$

(e) $Q = 8p^{-12} + 13$

Exprimaţi preţul în funcţie de cerere şi calculaţi valoarea marginală (derivata) acestuia.

Răspuns. $p' = -b$, $p' = -2ab + b^2 Q$, $p' = -\dfrac{b}{a} e^{-Q/a}$, $p' = \dfrac{-75}{2\sqrt{53 - 75Q}}$, $p' = \dfrac{-\sqrt{(Q-13)^7}}{2^{18} \cdot 3\sqrt{2}}$

6. Fie funcţia cerere exprimată în raport cu preţul unitar, iar a şi b sunt parametrii reali :

(a) $Q = a + b \cdot p$

(b) $Q = a \cdot e^p$

(c) $Q = \dfrac{ap}{b + p}$

(d) $Q = 6 + 8p + 3p^2$

(e) $Q = 3 \cdot \dfrac{2 + p}{3 + p}$

Calculaţi valoarea marginală a funcţiei cerere precum şi elasticitatea cererii în raport cu preţul.

Răspuns. $E_Q(p) = \dfrac{-pb}{a + pb}$, $E_Q(p) = -p$, $E_Q(p) = \dfrac{-b}{b + p}$, $E_Q(p) = \dfrac{-2p(4 + 3p)}{3p^2 + 8p + 6}$, $E_Q(p) = \dfrac{-p}{(2 + p)(3 + p)}$

7. Fie funcţia încasării totale $R(p) = p \cdot C(p)$ unde p este preţul unitar iar C cererea. Arătaţi că:

a) dacă cererea este elastică atunci încasările totale sunt descrescătoare

b) dacă cererea este inelastică atunci încasările totale sunt crescătoare

Răspuns. Indiciu: Exprimaţi derivata $R'(p)$ în funcţie de elasticitate $E_c(p)$:

$$R'(p) = p \cdot C'(p) + C(p) = C(p) \left(1 + \frac{p \cdot C'(p)}{C(p)}\right) = C(p) \left(1 - E_c(p)\right).$$

Discuţie după semnul lui $R'(p)$.

8. Fie funcţia cerere în raport cu preţul $C(p) = 500 - 2p$.

a) Determinaţi $E_C(5)$. Este cererea elastică sau inelastică în acest caz ?

b) Unde cererea este elastică respectiv inelastică în raport cu preţul ?

c) Care sunt intervalele de monotonie ale funcţiei încasării totale (vezi problema 4)şi respectiv valoarea sa maximă ?

Răspuns.

a) $E_C(5) < 1$ prin urmare cererea este inelastică în acest caz.

b) Pentru $p > 125$ avem cerere elastică, pentru $p < 125$ inelastică iar pentru $p = 125$ avem elasticitate unitară.

c) $R(p) = 500p - 2p^2$. Se calculează $R'(p)$ şi respectiv $R''(p)$. Se obţine $R_{max} = R(125) = 43750$.

9. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul întâi pentru funcţiile de mai jos, în punctele (1,1) şi respectiv (1,1,1):

   (a) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^3$ **Răspuns:** 10, 9

   (b) $f(x, y) = 3x^4 - 5x^2y^3 - 4x^3y^2 - 3y^2 + 4x + 3y + 1$ **Răspuns:** -6, -26

   (c) $f(p, q) = 4p^3q^2$ **Răspuns:** 12, 8

   (d) $f(k, l) = 4\sqrt{k}l^3$ **Răspuns:** 2, 12

   (e) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **Răspuns:** 1/2, 1/2

   (f) $f(p, q) = \dfrac{p^2 + q^2}{pq}$ **Răspuns:** 0, 0

   (g) $f(x, y) = \sqrt{xy^3} + \dfrac{2}{x}$ **Răspuns:** -3/2, 3/2

   (h) $f(s, t) = \dfrac{s + t}{3t} - \dfrac{2s + t^2}{\sqrt{s}}$ **Răspuns:** 5/6, -7/3

   (i) $f(x, y) = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ **Răspuns:** $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   (j) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 3yz + xz^2 + z^3$ **Răspuns:** 9, 1, 2

   (k) $f(x, y, z) = x^y + y^z$ **Răspuns:** 1, 1, 0

   (l) $f(p, q, r) = pqr$ **Răspuns:** 1, 1, 1

   (m) $f(x, y, z) = 3x^3\sqrt{y^3}z^2$ **Răspuns:** 9, 9/2, 6

   (n) $f(r, s, t) = \dfrac{r}{s} + \dfrac{s}{t} + \dfrac{t}{r}$ **Răspuns:** 0, 0, 0

10. Determinaţi productivităţile marginale pentru următoarele funcţii de producţie în punctul $(1, 1, 2)$:

    (a) $f(x, y, z) = 3x^2y^4z^3$

    (b) $f(p, q, r) = 4p^2\sqrt{q}r$

    (c) $f(x, y, z) = 2x + y - 5z$

    Răspuns. a) 2, -4, -3; b) -2, -1/2, -1; c) 2/7, 1/7, -10/7

11. Calculaţi derivatele parţiale de ordinul 1, 2 şi 3 pentru funcţiile de mai jos. Calculaţi de asemenea valorile lor în punctele precizate.

    (a) $f(x, y) = 2x^2y^4$, $a = (-2, 2)$ **Răspuns:** (-128,256), (64,384,-256), (0,384,128,-384)

    (b) $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$, $a = (1, 1)$ **Răspuns:** (1,1), (-1/2,-1/2,1/2), (3/4,3/4,-1/4,-1/4)

    (c) $f(x, y) = 3x^5 - 2xy^2 + y^3$, $a = (2, 1)$ **Răspuns:** (238,-5), (480,-2,-4), (720,6,0,-4)

(d) $f(x,y) = x^3y + xy^3, \quad a = (-1,1)$ **Răspuns:** (4,-4), (-6,-6,3), (6,-6,-6,6)

(e) $f(x,y) = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \quad a = (1,1)$ **Răspuns:** (5/2,-3), (-1/2,4,-3/2), (5/4,-12,-1/2,4)

(f) $f(x,y) = y\ln x, \quad a = (e,1)$ **Răspuns:** $(1/e, 1), (-1/e^2, 0, 1/e), (2/e^3, 0, -1/e^2, 0)$

(g) $f(x,y,z) = 3x^2y + 5xyz^2 - 2y^3z^2, \quad a = (1,1,2)$ **Răspuns:** (26,-1), (6,-48,26), (0,-48,0,6,0,0,-48,10,-38)

(h) $f(x,y,z) = y \cdot e^x + z^2 \cdot e^y, \quad a = (1,1,1)$ **Răspuns:** (e,2e,2e), (e,e,2e), (e,e,0,e,0,0,2e,0,2e)

12. Calculaţi derivatele parţiale specificate pentru funcţiile de mai jos:

(a) $f(x,y) = xy^3e^y, \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ **Răspuns:** $3xy(y^2+4y+2)e^x$

(b) $f(p,q) = 3p^3q^2, \quad f''_{p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ **Răspuns:** $18pq^2$

(c) $f(k,l) = 5\sqrt{k}l^3, \quad f''_{kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial k \partial l}$ **Răspuns:** $15l^2/2\sqrt{k}$

(d) $f(s,t) = \dfrac{2s-t}{s+2t}, \quad f'''_{s^2t} = \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t}$ **Răspuns:** $-30s/(s+2t)^2$

(e) $f(p,q) = \dfrac{p^2+q^2}{pq}, \quad f''_{qp} = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}$ **Răspuns:** $(p^2+2pq-q^2)/p^2q^2$

(f) $f(x,y,z) = 2x + y - 5z, \quad f'''_{z^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$ **Răspuns:** 0

(g) $f(r,s,t) = \ln\left(\dfrac{r}{s}\right) + \ln\left(\dfrac{s}{t}\right) + \ln\left(\dfrac{t}{r}\right), \quad f'''_{rst} = \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial s \partial t}$ **Răspuns:** 0

13. Scrieţi expresiile diferenţialelor de ordinul întâi şi doi pentru următoarele funcţii. Calculaţi de asemenea expresiile diferenţialelor găsite în punctele indicate.

(a) $f(x,y) = x^2\ln y, \quad a = (2,5), \quad h = (3,4)$

(b) $f(x,y) = x^2y + xe^y, \quad a = (-1,-2), \quad h = (1,1)$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^3}}{x-y}, \quad a = (1,2), \quad h = (2,3)$

(d) $f(x,y,z) = 7x^3y^2z^5 \quad a = (3,2,1), \quad h = (5,3,1)$

(e) $f(x,y,z) = \ln(x^2y^3 - z^2x) \quad a = (2,2,2), \quad h = (1,1,1)$

Răspuns:

(a) $df_{(2,5)}(3,4) = 12\ln 5 + \dfrac{16}{5}, \quad d^2f_{(2,5)}(3,4) = 18\ln 5 + \dfrac{416}{25}$

(b) $df_{(-1,-2)}(1,1) = 5, \quad d^2f_{(-1,-2)}(1,1) = \dfrac{1}{e^2} - 8$

(c) $df_{(1,2)}(2,3) = -\dfrac{11}{3}, \quad d^2f_{(1,2)}(2,3) = \dfrac{177}{6}$

(d) $df_{(3,2,1)}(5,3,1) = 9828, \quad d^2f_{(3,2,1)}(5,3,1) = 114282$

(e) $df_{(2,2,2)}(1,1,1) = \dfrac{77}{30}, \quad d^2f_{(2,2,2)}(1,1,1) = -\dfrac{167}{100}$

14. O fabrică produce două tipuri de bunuri. Costul producerii acestor bunuri este dat prin funcţia $f(x, y)$, unde x şi y reprezintă cantităţile produse din fiecare tip de produs. Să se minimizeze costul atunci când $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 10$.

    Răspuns: $f_{min} = f(1, 1) = 9$

15. O fabrică produce trei tipuri de bunuri în cantităţile x, y şi z. Să se calculeze pentru ce valori ale acestor cantităţi, se obţine profitul maxim, dacă profitul este dat prin următoarea funcţie $f(x, y, z) = x\,y^2\,z^3\,(14 - x - 2y - 3z)\,,\ x\,y\,z \neq 0$.

    Răspuns: $f_{max} = f(2, 2, 2) = 128$ Indiciu: desfaceţi parantezele, derivaţi iar apoi în expresia derivatelor parţiale daţi din nou factor comun şi după egalarea cu 0, simplificaţi.

16. Găsiţi extremele funcţiilor de mai jos:

    (a) $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + 8y + 6$ **Răspuns:** $f_{min} = f(7, -5) = -7$

    (b) $f(x, y) = -3x^2 + 4xy - 4y^2 + 4x - 4y - 5$ **Răspuns:** $f_{max} = f(1/2, -1/4) = -7/2$

    (c) $f(x, y) = x^3y^2(36 - x - y), \quad xy \neq 0$ **Răspuns:** $f_{max} = f(18, 12) = 5.038.848$

    (d) $f(x, y) = xy + \dfrac{64}{x} - \dfrac{8}{y} \quad x, y \neq 0$ **Răspuns:** $f_{max} = f(-2, 1) = -42$

    (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ **Răspuns:** $f_{min} = f(-1, -2, 3) = -14$

17. O bancă oferă persoanelor fizice credite în valoare de 5000 u.m., 10000 u.m. şi respectiv 50000 u.m. Pentru C_1 credite de 5000 u.m. contractate, banca obţine un beneficiu de $200-3C_1$ u.m./credit. Pentru C_2 credite de 10000 u.m. contractate, beneficiul băncii este $500 - 7C_2$ u.m./credit. Contractarea unui număr de C_3 credite de 50000 u.m. aduce băncii un beneficiu de $560 - 4C_3$ u.m./credit. În cazul rambursărilor anticipate a creditelor contractate, pentru C credite lichidate înainte de termenul scadent, pierderile băncii sunt estimate la $450 + 80C$ u.m. Care ar fi numărul optim de credite contractate, de fiecare tip, astfel ca beneficiul băncii să fie maxim şi care ar fi acest beneficiu ?

    Răspuns: $f_{max} = f(20, 30, 60) = 21.450$ u.m.
    Indiciu: Beneficiul total = Diferenţa între beneficiile pe fiecare tip de credit în parte şi pierderile aferente

$$f(c_1, c_2, c_3) = c_1(200 - 3c_1) + c_2(500 - 7c_2) + c_3(560 - 4c_3) - 450 - 80(c_1 + c_2 + c_3)$$

18. În decursul unui an, valorile totale ale importurilor şi exporturilor unei ţări, pentru un tip de produs importat şi două tipuri de produse exportate, au fost estimate prin funcţiile $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definite prin

Importuri (u.m.)	$I(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 237$
Exporturi (u.m.)	$E(y, z) = 2y^3 + 2z^3 - 15y^2 - 21z^2 + 24y + 72z + 365$

Să se determine cantităţile din cele trei tipuri de produse pentru care, la sfârşitul anului, balanţa comercială are valoarea maximă şi să se precizeze această valoare.

Răspuns: $f_{max} = f(2, 1, 3) = 248$ u.m.
Indiciu: Balanţa comercială = Valoarea exporturilor - valoarea importurilor

19. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţiile de mai jos:

    (a) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + y = 2$
    (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + 2y = 3$
    (c) $f(x, y) = x + 2y$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x^2 - y^2 = -3$
    (d) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xyz = 1$, ştiind că $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$
    (e) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
    (f) $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xy + yz + zx = 12$.

    Răspuns:

    (a) $f_{max} = f(1, 1) = 1$
    (b) $f_{min} = f(1, 1) = -2$
    (c) $f_{max} = f(1, -2) = -3$, $f_{min} = f(-1, 2) = 3$
    (d) $f_{min} = f(1, 1, 1) = 3$
    (e) $f_{max} = f(2, 1, -2) = 9$, $(-2, -1, 2)$ nu e extrem
    (f) $f_{min} = f(-2, -2, -2) = -8$

20. Interiorul unei săli de cinema urmează să fie izolat fonic. În planul de izolare al sălii se urmăreşte folosirea unei cantităţi minime de material izolant, podeaua sălii fiind exclusă izolării fonice. Să se determine dimensiunile sălii de cinema dacă volumul ei este de 4000 m^3.

    Răspuns: $C_{min} = f(20, 20, 10) = 12.000$ u.m.
    Indiciu: $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$ cu legătura $xyz = 4000$.

21. O intreprindere produce o cantitate Q de produse utilizând capitalul K şi forţa de muncă L. Funcţia de producţie este
    $$Q = F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}.$$
    Preţul unităţii de capital este 500 lei, iar preţul unităţii de forţă de muncă este 400 lei. Se cere să se determine acele valori ale lui K şi L care minimalizează cheltuielile ştiind că disponibilul pentru producţie este de 5.000 bucăţi .

    Răspuns: $C_{min} = f(10^5, 5^4 \cdot 10^2) = 75.000.000$ u.m.
    Indiciu: $f(K, L) = 500K + 400L$ cu legătura $K^{1/2}L^{1/4} = 5000$.

22. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţia $f(x, y, z) = x + y + z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, cu legătura $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

    Răspuns: $f_{min} = f(3, 3, 3) = 9$ u.m.

23. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţia $f(x, y, z) = x + y + z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legăturile $x - y + z = 2$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

    Răspuns: $f_{max} = f(4/3, 2/3, 4/3) = 10/3, \quad f_{min} = f(0, -2, 0) = -2$

24. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcţia $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legăturile $x + y + z = 5$ şi $xy + yz + zx = 8$.

    Răspuns: $f_{max} = f(4/3, 4/3, 7/3) = f(7/3, 4/3, 4/3) = f(4/3, 7/3, 4/3) = 112/27, \quad f_{min} = f(2, 2, 1) = f(2, 1, 2) = f(1, 2, 2) = 4$

25. Media temperaturilor înregistrate în luniile aprilie, mai şi iunie a fost de $15°$, $20°$ şi respectiv $23°$. Care va fi prognoza pentru luna august având în vedere că cercetătorii au observat o creştere liniară (ajustare printr-o dreaptă) a temperaturii până la începutul lunii septembrie.

    Răspuns: $y = -2/3 + 4x, \quad y = f(8) = 31, 3°$
    Indiciu: Pentru simplificarea calculelor setăm $aprilie := 4$. Atunci $mai := 5$ şi $iunie := 6$.

26. O companie producătoare de ciocolată a determinat date referitoare la cota de piaţă şi respectiv preţul de vânzare pe kilogram al ciocolatei timp de patru luni consecutive. S-au obţinut astfel următoarele rezultate:

Preţ pe kg (euro)	4,5	5,2	4,7	4,9
Cota de piaţă	10	8	8,9	9,1

    Să se ajusteze aceste date numerice printr-o dreaptă. Presupunând că în luna a 5-a preţul pe kg este $x = 2$ să se găsească cota de piaţă y. **Răspuns:** $y = 21, 25 - 2, 54x, \quad y = f(2) = 16, 17$

27. În urma unui studiu privind cererea unor produse de primă necesitate, s-au obţinut următoarele date pentru venitul x al unei persoane şi cererea y a produselor respective:

Venit (mii Dolari)	1	2	4	8
Cerere (mii Dolari)	0,4	1	1,6	2

    Să se ajusteze aceste date print-o dreaptă. **Răspuns:** $y = 0, 46 + 0, 21x$

28. Profitul înregistrat de către o firmă în anul 2004 este de 5,1 milioane euro, în anul 2007 este de 8,3 milioane euro, iar în anul 2009 este de 2,3 milioane euro. Să se ajusteze aceste valori printr-o dreaptă, respectiv printr-o parabolă şi să se calculeze previziunea profitului pentru anul 2012 şi 2013 (în ambele cazuri).

    Răspuns: $y = 5, 52 - 0, 43x, \quad f(6) = 1, 43, f(7) = 0, 76;$ $y = 8, 86 + 0, 25x - 0, 81x^2, \quad f(6) = -18, 8, f(7) = -29, 08$. Indiciu: Pentru simplificarea calculelor setăm $2006 := 0$. Atunci $2004 := -2$, $2009 := 3$, $2012 := 6$ şi $2013 := 7$.

29. Numărul calculatoarelor vândute lunar de către o firmă este dat în tabelul de mai jos.

luna	ianuarie	martie	aprilie
nr.calc.	30	45	50

Să se ajusteze printr-o dreaptă, respectiv printr-o parabolă, datele de mai sus şi să se preconizeze numărul de calculatoare ce urmează a fi vândute în luna septembrie şi decembrie (pentru fiecare caz în parte).

Răspuns: $y = 24,1 + 6,7x$, $f(9) \approx 84$, $f(12) \approx 105$; $y = 20 + 10,83x - 0,83x^2$, $f(9) \approx 50$, $f(12) \approx 30$

30. Se consideră următoarele date numerice:

x	1	3	4	5	6
y	1	9	19	33	51

Să se ajusteze datele numerice printr-o dreaptă, respectiv o parabolă, iar apoi să se găsească valoarea lui y din punctul $x = 8$.

Răspuns: $y = -14,75 + 9,83x, \quad f(8) = 63,89; \quad y = 3 - 4x + 2x^2, \quad f(8) = 99$

31. Să se calculeze valorile funcţiilor gama şi beta de mai jos:

a) $\Gamma(7)$; b) $\Gamma(\log_2 32)$; c) $B(1,1)$; d) $B(3,6)$;

e) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$; f) $B\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{6}\right)$; g) $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$; h) $B\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$;

i) $B\left(B\left(2, \frac{1}{2}\right), 2\right)$; j) $B\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$;

Răspuns: $720, 24, 1, \frac{1}{168}, \pi\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{20\sqrt{2}-24}{7}, \frac{96}{\pi(2+\pi)(4+\pi)(6+\pi)}, \frac{9}{28}, \frac{\pi}{n \cdot \sin\frac{\pi}{n}}$

32. Folosind proprietăţile funcţiilor gama şi beta, calculaţi:

a) $B\left(4, \frac{1}{6}\right) + 3\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$; b) $B\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right) + 2\Gamma(3) - \Gamma(4)$

Răspuns: $\frac{7776}{1729} + \frac{45\sqrt{\pi}}{8}, \frac{77\sqrt{2}\pi - 256}{128}$

33. Folosind proprietăţile integralelor euleriene, să se calculeze următoarele integrale:

1) $\int_0^1 \sqrt{x}(x-1)^2 dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{(x-1)^3}{\sqrt[4]{x}} dx$; 4) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} dx$;

5) $\int_0^1 \frac{1+2x+3x^2}{\sqrt{1-x}} dx$; 6) $\int_0^1 (x+1)^2 \sqrt[3]{1-x} dx$; 7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[99]{x-1}}$;

8) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{x-1}}{x-1} dx$; 9) $\int_0^1 (1 - \frac{1}{x})\sqrt{x} dx$; 10) $\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$;

11) $\int_0^1 x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^4 dx$; 12) $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x}(x+1) dx$; 13) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^3}{\sqrt[3]{4x}} dx$;

$$14)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx;\ \ 15)\ \int_{0}^{\frac{1}{3}} \sqrt{x-3x^2}dx;\ \ 16)\ \int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2}dx;$$

$$17)\ \int_{0}^{3} x\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx;\ \ 18)\ \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}dx;\ \ 19)\ \int_{-2}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{e^{x+2}}}dx;$$

$$20)\ \int_{1}^{2} \frac{x-2}{\sqrt[4]{x-1}}dx;\ \ 21)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x}dx;\ \ 22)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x^2+x+1}{e^x}dx;\ \ 23)\ \int_{0}^{\infty} xe^{-\sqrt{2}x}dx;$$

$$24)\ \int_{0}^{\infty} (x+1)^2 e^{-x}dx;\ \ 25)\ \int_{0}^{\infty} (x^3+1)e^{-2x+1}dx;\ \ 26)\ \int_{0}^{\infty} \frac{xe^{x-1}}{e^{3x}}dx;$$

$$27)\ \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-3x^2}dx;\ \ 28)\ \int_{0}^{\infty} \frac{x-1}{2e^x}dx;\ \ 29)\ \int_{0}^{\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}}dx;\ \ 30)\ \int_{0}^{\infty} \frac{e^x-x}{e^{3x}}dx;$$

$$31)\ \int_{0}^{\infty} \frac{e^{2x}(x+1)}{e^{3x+2}}dx;\ \ 32)\ \int_{0}^{\infty} x^3 e^{-3x+1}dx;\ \ 33)\ \int_{0}^{\infty} xe^{-(x+3)}dx;\ \ 34)\ \int_{-3}^{\infty} xe^{-(x+3)}dx;\ \ 35)\ \int_{1}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x-1}{4}}dx.$$

Răspuns: $(1)\frac{16}{105}, (2)-\frac{4}{3}, (3)\frac{512}{1155}, (4)\frac{8}{5}(x=\sqrt{t}), (5)\frac{118}{15}, (6)\frac{111}{70}, (7)-\frac{99}{98}, (8)1, (9)-\frac{4}{3}(\frac{1}{x}=t), (10)\frac{5\pi}{16}, (11)\frac{1}{315}(\sqrt{x}=t), (12)-\frac{9}{28}(x+1=t), (13)-\frac{3^5}{880\sqrt{32}}(2x=t), (14)-\frac{1}{3}(2x+1=t), (15)\frac{\sqrt{3}}{72}(3x=t), (16)\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}(1/x=t), (17)\frac{27\pi}{8}(3-x=t), (18)-\frac{9}{10}(x+1=t), (19)6\left(\frac{x+2}{3}=t\right), (20)-\frac{16}{21}(x-1=t), (21)6, (22)4, (23)1/2(\sqrt{2}x=t), (24)5, (25)\frac{7e}{8}(2x=t), (26)\frac{1}{4e}(2x=t), (27)\frac{\sqrt{3}\pi}{36}(3x^2=t), (28)0, (29)\frac{3}{2}, (30)\frac{7}{18}, (31)\frac{2}{e^2}, (32)\frac{2e}{27}(3x=t), (33)\frac{1}{e^3}, (34)-2(x+3=t), (35)164(\frac{x-1}{4}=t)$

Rezumat

In acest modul s-au prezentat definitii si concepte de baza legate de functiile reale de mai multe variabile reale cum sunt: elemente de topologie ale spatiului $\mathbb{R}^n$, limite de functii si continuitatea lor de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$, derivate partiale si diferentiala. Au fost prezentate notiunile de derivate partiale si derivate de ordin superior, extremele functiilor de mai multe variabile (conditii necesare si suficiente pentru existenta extremelor locale). De asemenea s-au prezentat si notiuni legate de ajustarea prin metoda celor mai mici patrate a datelor experimentale. In final au fost introduse si studiate notiunile privind integralele Euler de speta intai (functia beta), de speta a doua (functia gama), proprietatile acestora, precum si integrala Euler-Poisson.

Bibliografie

1. Colectiv, Elemente de algebra liniara, analiza matematica si teoria probabilitatilor, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2009
2. Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2012.

Capitolul 2

MODULUL II. Teoria probabilitatilor

Obiective

- Definirea si studiul principalelor proprietati ale conceptelor de baza din teoria probabilitatilor.

  Crearea la studenti a unor deprinderi de utilizare a tehnicilor probabilistice si de folosire a acestora in scop aplicativ.

  Fundamentarea probabilistica a statisticii matematice.

Concepte de baza

- Eveniment aleator, probabilitate, probabilitate conditionata, scheme clasice de probabilitate.
- Variabila aleatoare, functie de probabilitate a unei variabile aleatoare discrete, functie de repartitie a unei variabile aleatoare, densitate de probabilitate, functia de repartitie a unei variabile aleatoare de tip continuu.
- Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare (media, dispersia, momente, corelatia)
- Repartitii clasice.

Rezultate asteptate

Se urmareste buna intelegere de catre studenti a tehnicilor de abordare probabilistica a fenomenelor aleatoare, utilizarea adecvata a schemelor probabilistice care modeleaza astfel de fenomene, intelegerea conceptului de variabila aleatoare, precum si formarea deprinderilor de calcul ale caracteristicelor numerice pentru variabilelor aleatoare. Se doreste ca studentii sa inteleaga foarte bine semnificatia caracteristicilor pe care le calculeaza si, de asemenea sa inteleaga motivele aplicarii teoriei probabilitatilor in statistica matematica.

UNITATEA 1. Câmp de evenimente. Câmp de probabilitate. Scheme clasice de probabilitate.

2.1 Câmp de evenimente, câmp de probabilitate

2.1.1 Corp de părţi ale unei mulţimi

Definiţia 2.1.1. *Se numeşte **corp de părţi** ale mulţimii nevide Ω orice familie nevidă $\mathbb{K} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ unde $\mathbb{P}(\Omega)$ este mulţimea părţilor lui Ω, astfel încât*

a) $\forall\, A \in \mathbb{K} \Longrightarrow C_A \in \mathbb{K}$ *unde* $C_A = \Omega \setminus A$*;*

b) $\forall\, A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A \bigcup B \in \mathbb{K}$.

Propoziţia 2.1.1. *Fie $\mathbb{K}$ un corp de părţi ale mulţimii nevide Ω. Atunci:*

1) $\phi,\ \Omega \in \mathbb{K}$*;*

2) $\forall\, A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A \bigcap B \in \mathbb{K}$*;*

3) $\forall\, A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A - B \in \mathbb{K}$.

Demonstraţie.

1) $\mathbb{K}$ nevidă $\Longrightarrow$ $(\forall\, A \in \mathbb{K} \Longrightarrow C_A \in \mathbb{K}) \Longrightarrow A \bigcap C_A \in \mathbb{K} \Longrightarrow \Omega \in \mathbb{K} \Longrightarrow C_\Omega \in \mathbb{K} \Longrightarrow \phi \in \mathbb{K}$. Deci $\phi, \Omega \in \mathbb{K}$.

2) $\forall\, A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow C_A, C_B \in \mathbb{K} \Longrightarrow C_A \bigcup C_B \in \mathbb{K} \overset{\text{De Morgan}}{\Longrightarrow} C_{A \bigcap B} \in \mathbb{K} \Longrightarrow C\left(C_{A \bigcap B}\right) \in \mathbb{K} \Longrightarrow A \bigcap B \in \mathbb{K}$.

3) $\forall\, A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A, C_B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A \bigcap C_B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A - B \in \mathbb{K}$.

$\square$

Observaţia 2.1.1. *Prin definiţie, un corp de părţi $\mathbb{K}$ este închis faţă de trecerea la complementară şi faţă de reuniune. Definiţia corpului de părţi garantează şi închiderea sa faţă de reuniunea sau diferenţa de mulţimi.*

Prin inducţie matematică rezultă că un corp de părţi este închis şi faţă de reuniunea sau intersecţia finită oarecare de mulţimi adică pentru orice $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$, $(n \geq 3)$ avem şi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{K}$ respectiv $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathbb{K}$.

De asemenea, un corp de părţi conţine în mod necesar submulţimile improprii ϕ şi Ω.

Exemplul 2.1.1. **1)** *Dacă $\Omega \neq \phi$ atunci $\mathbb{K} = \mathbb{P}(\Omega)$ este un exemplu (banal) de corp de părţi ale lui Ω.*

2) *Fie $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Atunci*

$$\mathbb{K} = \{\phi, \Omega, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$$

este un corp de părţi ale lui Ω.

2.1.2 Câmp de evenimente

Vom înţelege prin **experiment aleator** orice experiment al cărui rezultate, considerate din punct de vedere al unui anumit criteriu, nu sunt cunoscute înainte de efectuarea experimentului (repetând un astfel de eveniment, în condiţii identice, se pot obţine rezultate diferite, nu se poate preciza rezultatul ci se poate face doar o listă cu rezultatele posibile). Orice rezultat posibil în urma unui experiment aleator se numeşte **eveniment aleator**. Evenimentele care nu se pot realiza drept consecinţă a realizării altora se numesc **evenimente elementare**. Considerăm, de exemplu, experimentul aruncării unui zar (obişnuit, nemăsluit) şi evaluăm rezultatul din punct de vedere al apariţiei (non-apariţiei) vreunora dintre feţele de la 1 la 6. Folosim notaţii de tipul ce urmează:

$A = \{1\}$ – apariţia feţei 1.

$B = \{1, 4\}$ – apariţia vreuneia dintre feţele 1 sau 4.

$C = \{2, 5, 6\}$ – apariţia vreuneia dintre feţele 2,5 sau 6,etc.

A este evenimente elementar (analog $\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{6\}$) dar B nu este elementar (B se poate realiza ca şi consecinţă a realizării lui A). Vom reveni ulterior, cu mai multă rigoare, asupra conceptului de experiment elementar.

Notăm cu Ω mulţimea tuturor evenimentelor elementare generate de un experiment aleator. În continuare ne este comod să tratăm această mulţime ca o mulţime de puncte pentru care submulţimile reduse la un punct cores-pund evenimentelor elementare. Ω se mai numeşte şi **mulţime fundamentală (de referinţă)** sau **spaţiu de selecţie**. Orice alt eveniment poate fi asimilat cu o submulţime a spaţiului Ω (în exemplul de mai sus avem $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $A, B, C \subset \Omega$). In particular, Ω corespunde evenimentului constând în realizarea a cel puţin unuia dintre evenimentele elementare posibile ceea ce se întâmplă la orice efectuare a evenimentului şi de aceea acest eveniment se numeşte **eveniment cert** sau **sigur**. Un alt eveniment particular este cel care corespunde mulţimii vide ϕ şi care revine la nerealizarea nici unui eveniment elementar posibil, ceea ce este imposibil la orice efectuare a experimentului şi din acest motiv acest eveniment se numeşte **eveniment imposibil.** Vom păstra pentru evenimentul sigur şi evenimentul imposibil aceleaşi notaţii Ω şi respectiv ϕ ca şi pentru submulţimile lui Ω cărora le corespund.

Fie $\mathcal{E}$ mulţimea tuturor evenimentelor aleatoare generate de un experiment aleator.

Definiţia 2.1.2. *Fie $A, B \in \mathcal{E}$. Se numeşte* ***intersecţie a evenimentelor*** *A şi B, notată $A \bigcap B$, evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă se realizează atât A cât şi B. Se numeşte* ***reuniune a evenimentelor*** *A şi B, notată $A \bigcup B$, evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul dintre evenimentele A şi B. Se numeşte* ***diferenţă a evenimentelor*** *A şi B, notată $A \setminus B$, evenimentul care se realizează atunci când se realizează A dar nu şi B (adică $A \setminus B = A \bigcap C_B$). Se numeşte****eveniment complementar*** *evenimentului A, notat C_A, evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă nu se realizează A (evenimentul complementar lui A se mai numeşte şi* ***eveniment contrar*** *lui A şi se mai notează $\overline{A}$ sau non$A$).*

Observaţia 2.1.2. **1)** *Pe $\mathcal{E}$ s-au evidenţiat legile interne de compoziţie (binare):*

$$\bigcup, \bigcap, \setminus : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

$$(A, B) \mapsto A \bigcup B, (A, B) \mapsto A \bigcap B, (A, B) \mapsto A \setminus B$$

şi legea de compoziţie internă (unară) $C : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad A \mapsto C_A$.

2) *Cum $A \setminus B = A \bigcap C_B, \forall A, B \in \mathcal{E}$ vom urmări în continuare doar proprietăţi ale legilor $\bigcup$, $\bigcap$, C (proprietăţile legii „$\setminus$” rezultă din proprietăţile legilor „$\bigcap$” şi „C”).*

Din definiţiile de mai sus se obţin rezultatele din următoarea propoziţie.

Propoziţia 2.1.2. *Pentru orice $A, B, C \in \mathcal{E}$ au loc proprietăţile:*

a) *asociativitate:* $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$,
$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$.

b) *comutativitate:* $A \bigcup B = B \bigcup A, \; A \bigcap B = B \bigcap A$.

c) *distributivitate:*
$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C), \; A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

d) *idempotenţă:* $A \bigcup A = A, \; A \bigcap A = A$.

e) $A \bigcap C_A = \phi, \quad A \bigcup C_A = \Omega, \quad A \bigcap \Omega = A, \; A \bigcup \Omega = \Omega, \quad A \bigcap \phi = \phi, \quad A \bigcup \phi = A$.

Definiţia 2.1.3. *Fie $A, B \in \mathcal{E}$. Se spune că* ***evenimentul*** *A* ***implică evenimentul*** *B (sau că B* ***este implicat de*** *A) şi se scrie $A \subset B$ (respectiv $B \supset A$) dacă realizarea lui A antrenează neapărat şi realizarea lui B.*

Observaţia 2.1.3. 1) *Relaţia de implicaţie se poate defini şi cu ajutorul „$\bigcup$" sau „$\bigcap$". Mai precis, pentru $A, B \in \mathcal{E}$ avem $A \subset B \Longleftrightarrow A \bigcap B = A \Longleftrightarrow A \bigcup B = B$.*
Cum $A \bigcap \phi = \phi$ şi $A \bigcap \Omega = A$ rezultă că $\phi \subset A$ şi $A \subset \Omega$ adică avem $\phi \subset A \subset \Omega, \;\forall\; A \in \mathcal{E}$.

2) *Relaţia de implicaţie este o relaţie de ordine parţială pe $\mathcal{E}$ (adică este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă). Intr-adevăr avem:*

a) $\forall A \in \mathcal{E} \Longrightarrow A \subset A$. *(reflexivitate)*

b) $A, B \in \mathcal{E}$, $A \subset B$ *şi* $B \subset A \Longrightarrow A = B$. *(antisimetrie)*

c) $A, B \in \mathcal{E}$, $A \subset B$ *şi* $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

3) *Se poate arăta că dacă $A, B \in \mathcal{E}$, $A \bigcup B = \Omega$ şi $A \bigcap B = \phi$ atunci $A = C_B$ sau, echivalent, $B = C_A$.*
În particular, cum $A \bigcap C_A = \phi$ şi $A \bigcup C_A = \Omega$ avem $C(C_A) = A$ şi de asemenea din $\phi \bigcup \Omega = \Omega$, $\phi \bigcap \Omega = \phi$ rezultă că $\phi = C_\Omega$ şi $\Omega = C_\phi$.

Utilizând această observaţie se poate demonstra propoziţia de mai jos (pe care o admitem fără demonstraţie).

Propoziţia 2.1.3. (relaţiile lui De Morgan)
Pentru orice $A, B \in \mathcal{E}$ avem $C_{A \bigcup B} = C_A \bigcap C_B$ şi $C_{A \bigcap B} = C_A \bigcup C_B$.

Definiţia 2.1.4. *Se spune că evenimentele $A, B \in \mathcal{E}$ sunt* ***incompatibile*** *dacă ele nu se pot realiza simultan, adică $A \bigcap B = \phi$.*

Definiţia 2.1.5. *Se spune că evenimentul $A \in \mathcal{E}$ este* ***eveniment elementar*** *dacă $\forall B \in \mathcal{E}$, $B \subset A$ rezultă că $B = \phi$ sau $B = A$ (adică A nu poate fi implicat decât de către evenimentul imposibil sau de către el însuşi).*

Observaţia 2.1.4. **1.** *Mai sus am constatat că evenimentele aleatoare generate de un experiment aleator pot fi concepute ca fiind submulţimi ale unei mulţimi de referinţă Ω adică $\mathcal{E}$ se poate asimila cu o familie de submulţimi ale lui Ω închisă faţă de operaţiile cu mulţimi şi care nu este neapărat $P(\Omega)$. Motivele pentru care nu orice submulţime a lui Ω este eveniment depăşesc cadrul acestui curs fiind deci omise. Se poate arăta însă că $\mathcal{E}$ se poate asimila cu un corp de părţi $(\Omega, \mathbb{K})$, pentru care elementele din $\mathbb{K}$ corespund bijectiv cu elementele din $\mathcal{E}$ (în particular mulţimea ϕ din $\mathbb{K}$ corespunde evenimentului imposibil din $\mathcal{E}$ mulţimea de referinţă Ω din $\mathbb{K}$ corespunde evenimentului sigur din $\mathcal{E}$), reuniunea a două mulţimi din $\mathbb{K}$ corespunde reuniunii (în sensul din $\mathcal{E}$) a evenimentelor din $\mathcal{E}$ corespunzătoare celor două mulţimi, etc.*

2. *În cele de mai sus am presupus implicit că Ω este o mulţime finită. Să considerăm acum, din nou, experimentul aruncării zarului şi urmărim evenimentul A constând în faptul că faţa 5 (de exemplu) să apară pentru prima dată la o aruncare de ordin par (după un număr impar de neapariţii).*

Notând cu A_k evenimentul ca faţa 5 să apară pentru prima dată la a k-a aruncare ($k \in \mathbb{N}^*$) avem

$A = A_2 \bigcup A_4 \bigcup A_6 \bigcup \ldots \bigcup A_{2k} \bigcup \ldots \bigcup \ldots = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{2k}$ şi suntem conduşi la a considera o infinitate numărabilă (un şir) de evenimente elementare $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$ unde $\{w_n\} = A_n, n \in \mathbb{N}^*$) şi la a cere ca $\mathcal{E}$ să fie închisă şi faţă de reuniunea numărabilă (nu numai finită) de evenimente. În fapt, se poate arăta riguros, în astfel de cazuri $\mathcal{E}$ se poate asimila cu un σ-corp de părţi $(\Omega, \mathbb{K})$.

Din această observaţie ca şi din cea precedentă rezultă că putem opera cu evenimentele utilizând limbajul teoriei mulţimilor şi de aceea, în continuare, structurile de evenimente se definesc (din punct de vedere formal) direct ca structuri de mulţimi. Se justifică astfel definiţia care urmează.

Definiţia 2.1.6. *Se numeşte* ***câmp de evenimente*** *orice corp de părţi $(\Omega, \mathbb{K})$ al unei mulţimi nevide Ω. Se numeşte* **σ-câmp de evenimente** *orice σ-corp de părţi $(\Omega, \mathbb{K})$ al unei mulţimi nevide Ω.*

Observaţia 2.1.5. *Intr-un σ–câmp de evenimente, relaţiile lui De Morgan se pot generaliza pentru şiruri de evenimente adică avem:*

$$C\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{A_n} \text{ şi } C\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{A_n}.$$

2.1.3 Câmp de probabilitate

Definiţia 2.1.7. (definiţia axiomatică a probabilităţii)

Fie $(\Omega, \mathbb{K})$ un câmp de evenimente. Se numeşte ***probabilitate*** *pe $\mathbb{K}$ orice aplicaţie $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât*

P1) $P(A) \geq 0, \; \forall A \in \mathbb{K}$;

P2) $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B), \; \forall A, B \in \mathbb{K}$ *cu* $A \bigcap B = \phi$;

P3) $P(\Omega) = 1$.

Se numeşte ***câmp de probabilitate*** *orice triplet $(\Omega, \mathbb{K}, P)$, unde $(\Omega, \mathbb{K})$ este un câmp de evenimente iar P peste o probabilitate pe $\mathbb{K}$.*

Propoziţia 2.1.4. *Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ un câmp de evenimente. Atunci:*

a) $P(\phi) = 0$;

b) $P(C_A) = 1 - P(A)\,,\ \forall A \in \mathbb{K}$;

c) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)\,,\ \forall A, B \in \mathbb{K},\ A \subset B$;

d) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \bigcap B)\,,\ \forall A, B \in \mathbb{K}$;

e) $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)\,,\ \forall A, B \in \mathbb{K}$.

Demonstraţie.

a) $\Omega \bigcup \phi = \Omega \Longrightarrow P(\Omega \bigcup \phi) = P(\Omega)$ şi cum $\Omega \bigcap \phi = \phi$ rezultă din **P2)** că $P(\Omega \bigcup \phi) = P(\Omega) + P(\phi)$, adică avem $P(\Omega) + P(\phi) = P(\phi)$ sau $1 + P(\phi) = 1$, de unde $P(\phi) = 0$.

b) $\forall A \in \mathbb{K}$ avem $A \bigcup C_A = \Omega$, de unde $P(A \bigcup C_A) = P(\Omega)$, sau $P(A \bigcup C_A) = 1$, iar din $A \bigcap C_A = \phi$ rezultă conform **P2)** că $P(A \bigcup C_A) = P(A) + P(C_A)$. Pentru orice $A \in \mathbb{K}$ avem deci $P(A) + P(C_A) = 1$, adică $P(C_A) = 1 - P(A)$.

c) $\forall A, B \in \mathbb{K},\ A \subset B \Longrightarrow B = A \bigcup (B - A)$, şi cum $A \bigcap (B - A) = \phi \Longrightarrow P(B) = P(A \bigcup (B - A)) \overset{\mathbf{P2}}{=} P(A) + P(B - A) \Longrightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$.

d) $\forall A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow B - A = B - (A \bigcap B)$ cu $A \bigcap B \subset B \overset{\mathbf{c)}}{\Longrightarrow} P(B - A) = P(B) - P(A \bigcap B)$.

e) $\forall A, B \in \mathbb{K} \Longrightarrow A \bigcup B = A \bigcup (B - (A \bigcap B))$ cu

$A \bigcap (B - (A \bigcap B)) = \phi \Longrightarrow P(A \bigcup B) = P(A \bigcup (B - (A \bigcap B))) \overset{\mathbf{P2)}}{=} P(A) + P(B - (A \bigcap B)) \overset{\mathbf{c)}}{=} P(A) + P(B) - (A \bigcap B)$ pentru că $A \bigcap B \subset B$.

$\square$

Consecinţe.

1. Dacă $A, B \in \mathbb{K}$, cu $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$. (monotonie)

Într-adevăr, $P(B - A) \geq 0 \overset{\mathbf{c)}}{\Longrightarrow} P(B) - P(A) \geq 0 \Longrightarrow P(B) \geq P(A)$.

2. $\forall A \in \mathbb{K} \Longrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$.

Cum $\forall\, A \in \mathbb{K}$ avem $\phi \subset A \subset \Omega$, folosind consecinţa precedentă, obţinem $P(\phi) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ sau $0 \leq P(A) \leq 1$.

3. Prin inducţie matematică, folosind **P2)**, rezultă că dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$, cu $A_i \bigcap A_j = \phi$, $i = \overline{1, n}$, $i \neq j$, atunci $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ (probabilitatea unei reuniuni finite de evenimente incompatibile două câte două este suma probabilităţilor evenimentelor reuniunii).

Comportamentul probabilităţii faţă de o reuniune finită de evenimente *oarecare* (nu mai sunt incompatibile două câte două) din $\mathbb{K}$ este dat de propoziţia care urmează, obţinută tot prin inducţie matematică pornind de la subpunctul **e)** din Propoziţia 2.1.4.

Propoziţia 2.1.5. (formula de adunare a probabilităţilor sau **formula lui Poincaré)**

Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ *un câmp de probabilitate şi* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$. *Atunci*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P\left(A_i \bigcap A_j\right) + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} P\left(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k\right) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right). \end{aligned}$$

Observaţia 2.1.6. *Dacă* $A, B, C, D \in \mathbb{K}$ *avem evident*

a) $P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C)$;

b) $P(A \bigcup B \bigcup C \bigcup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(A \bigcap D) - P(B \bigcap C) -$
$P(B \bigcap D) - P(C \bigcap D) +$
$P(A \bigcap B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap D) + P(A \bigcap C \bigcap D) + P(B \bigcap C \bigcap D) -$
$-P(A \bigcap B \bigcap C \bigcap D)$.

Propoziţia 2.1.6. (inegalitatea lui Boole)
Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ *un* σ*–câmp de probabilitate şi* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir de evenimente din* $\mathbb{K}$. *Atunci*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - P(A_n)).$$

Observaţia 2.1.7. *Inegalitatea lui Boole este adevărată şi pentru un câmp de probabilitate. Dacă* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$ *atunci*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Observaţia 2.1.8. *Fie* $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *şi* $\mathbb{K} = P(\Omega)$. *Pe câmpul de evenimente* $(\Omega, \mathbb{K})$ *se consideră probabilitatea* P *cu proprietatea*

$$P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \ldots = P(\{w_n\}) \left(= \frac{1}{n}\right).$$

Dacă $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_k}\} \in \mathbb{K}$ *atunci*

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k} \{w_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^{k} P\left(\{w_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Se obţine astfel o altă definiţie a probabilităţii, adevărată într-un cadru mult mai restrictiv decât cel din Definiţia 2.1.7 dar extrem de utilizată în numeroase cazuri practice şi constituind, din punct de vedere istoric, prima definiţie dată conceptului de probabilitate.

Definiţia 2.1.8. (definiţia clasică a probabilităţii)
Probabilitatea unui eveniment A, *generat de un experiment aleator care generează un câmp finit de probabilitate cu evenimente elementare egal probabile, este egală cu raportul dintre numărul evenimentelor elementare favorabile realizării lui* A *şi numărul total de evenimente elementare posibile:*

$$P(A) = \frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}.$$

2.1.4 Probabilităţi condiţionate. Independenţa evenimentelor

In paragraful precedent, printre alte proprietăţi, s-au studiat şi proprietăţi care arătau comportamentul probabilităţii faţă de reuniunea evenimentelor. In acest paragraf vom urmări comportamentul probabilităţii faţă de intersecţia evenimentelor, proprietăţi grupate într-un paragraf separat tocmai datorită importanţei deosebite pe care o au în aplicaţiile practice.

Definiţia 2.1.9. *Fie* $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ *un câmp de probabilitate şi* $A \in \mathbb{K}$ *cu* $P(A) \neq 0$. *Se numeşte* **probabilitatea evenimentului** $X \in K$ **condiţionată de evenimentul** A, *notată* $P(X|_A)$, *raportul*

$$P(X|_A) = \frac{P(X \bigcap A)}{P(A)}.$$

Observaţia 2.1.9. *Avem* $P(X \bigcap A) = P(A) \cdot P(X|_A)$. *Dacă* $A, B \in \mathbb{K}$, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, *atunci*

$$P\left(A \bigcap B\right) = P(A) \cdot P(B|_A) = P(B) \cdot P(A|_B).$$

Am obţinut un prim rezultat care indică comportamentul probabilităţii faţă de intersecţie.

Propoziţia 2.1.7. *Fie* $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ *un câmp de probabilitate şi* $A \in \mathbb{K}$ *cu* $P(A) \neq 0$. *Atunci, aplicaţia* $P_A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_A(X) = P(X|_A)$ *este de asemenea o probabilitate pe* $\mathbb{K}$, *adică* $(\Omega, \mathbb{K}, P_A)$ *este tot un câmp de probabilitate.*

Demonstraţie. Verificăm condiţiile **P1), P2), P3)** din Definiţia 2.1.7.

P1) $\forall X \in \mathbb{K} \Longrightarrow P_A(X) = \frac{P(X \bigcap A)}{P(A)} = \frac{\geq 0}{> 0} \geq 0;$

P2) $\forall X, Y \in \mathbb{K}$ cu $X \bigcap Y = \phi \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} P_A\left(X \bigcup Y\right) &= \frac{P\left((X \bigcup Y) \bigcap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left((X \bigcap A) \bigcup (Y \bigcap A)\right)}{P(A)} \underset{\text{incomp}}{\overset{X \bigcap A,\, Y \bigcap A}{=}} \\ &= \frac{P(X \bigcap A) + (Y \bigcap A)}{P(A)} = \frac{P(X \bigcap A)}{P(A)} + \frac{P(Y \bigcap A)}{P(A)} = \\ &= P_A(X) + P_A(Y); \end{aligned}$$

P3) $P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega \bigcap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$

□

Observaţia 2.1.10. *Analog, pornind de la* σ*−câmpul de probabilitate* $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ *şi* $A \in \mathbb{K}$ *cu* $P(A) \neq 0$, *se obţine* σ*−câmpul de probabilitate* $(\Omega, \mathbb{K}, P_A)$, *unde* $P_A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$, $P_A(X) = P(X|_A)$.

Propoziţia 2.1.8. (formula de înmulţire a probabilităţilor)

Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ *un câmp de probabilitate şi* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$ *astfel încât* $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. *Atunci*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 |A_1) \cdot P\left(A_3 |_{A_1 \bigcap A_2}\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n|_{\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} A_i}\right).$$

Definiţia 2.1.10. *Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ un câmp de probabilitate. Se spune că evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$ formează un* ***sistem complet de evenimente*** *dacă*

a) $P(A_i) \neq 0,\ \forall i = \overline{1,n}$;

b) $A_i \bigcap A_j \neq 0,\ \forall i, j = \overline{1,n}, i \neq j$;

c) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Observaţia 2.1.11. *Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$ formează un sistem complet de evenimente dacă şi numai dacă la orice efectuare a experimentului se realizează unul şi numai unul dintre evenimentele sistemului. Un exemplu banal de sistem complet de evenimente este sistemul $\{A, C_A\}$ unde $A \in \mathbb{K}$, $P(A) \neq 0$. Renunţând la condiţia a) (cerută aici pentru comoditate) mulţimea tuturor evenimentelor elementare (poate fi o infinitate numărabilă) ale unui câmp de evenimente oferă un alt exemplu de sistem complet de evenimente.*

Propoziţia 2.1.9. (formula probabilităţii totale)
Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$ un sistem complet de evenimente iar $X \in \mathbb{K}$. Atunci

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X\,|_{A_i}).$$

Demonstraţie.
Avem $X = \Omega \bigcap X = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \bigcap X)$ unde evenimentele $A_i \bigcap X,\ i = \overline{1,n}$ sunt incompatibile două câte două. Deci

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i \bigcap X\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X|_{A_i}).$$

□

Propoziţia 2.1.10. (formula lui Bayes)
Fie $(\Omega, \mathbb{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}$ un sistem complet de evenimente iar $X \in \mathbb{K}$ astfel încât $P(X) \neq 0$. Atunci, pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixat, avem

$$P(A_j\,|_X) = \frac{P(A_j) \cdot P\left(X\,|_{A_j}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(X\,|_{A_i})}.$$

Demonstraţie.
Pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixat, avem

$$P\left(A_j \bigcap X\right) = P(A_j) \cdot P\left(X\,|_{A_j}\right) = P(X) \cdot P\left(X\,|_{A_j}\right)$$

de unde

$$P(A_j\,|_X) = \frac{P(A_j) \cdot P\left(X\,|_{A_j}\right)}{P(X)}.$$

Din formula probabilităţii totale rezultă

$$P\left(A_j\left|_X\right.\right)=\frac{P\left(A_j\right)\cdot P\left(X\left|_{A_j}\right.\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)\cdot P\left(X\left|_{A_i}\right.\right)}.$$

□

Definiţia 2.1.11. *Fie $(\Omega,\mathbb{K},P)$ un câmp de probabilitate şi $A,B\in\mathbb{K}$. Se spune că A şi B sunt **independente** dacă*

$$P\left(A\bigcap B\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B\right).$$

Observaţia 2.1.12. *Definiţia independenţei a două evenimente, dată formal mai sus, este echivalentă cu afirmaţia că A şi B sunt independente dacă nu se condiţionează reciproc. Fie $A,B\in\mathbb{K}$ astfel încât $P\left(A\right)\neq 0$, $P\left(B\right)\neq 0$ şi A,B independente în sensul Definiţiei 2.1.11. Atunci*

$$P\left(A\left|_B\right.\right)=\frac{P\left(A\bigcap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)}{P\left(B\right)}=P\left(A\right)$$

şi

$$P\left(B\left|_A\right.\right)=\frac{P\left(B\bigcap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{P\left(B\right)\cdot P\left(A\right)}{P\left(A\right)}=P\left(B\right),$$

adică faptul că B nu condiţionează pe A este surprins în relaţia $P\left(A\left|_B\right.\right)=P\left(A\right)$ şi analog faptul că A nu condiţionează pe B rezultă din egalitatea $P\left(B\left|_A\right.\right)=P\left(B\right)$.

Propoziţia 2.1.11. *Fie $(\Omega,\mathbb{K},P)$ un câmp de probabilitate şi $A,B\in\mathbb{K}$. Dacă A şi B sunt independente, atunci (C_A şi B), (C_B şi A), (C_A şi C_B) sunt de asemenea independente.*

Definiţia 2.1.12. *Fie $(\Omega,\mathbb{K},P)$ un câmp de probabilitate şi $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Se spune că evenimentele $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathbb{K}$ sunt **independente (în totalitate)** dacă oricare ar fi $i_1,i_2,\ldots i_r\in\mathbb{N},1\leq i_1<i_2<\ldots<i_r\leq n$, cu $r\in\mathbb{N}^*$, $r\leq n$, avem*

$$P\left(A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap\ldots\bigcap A_{i_r}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\cdot P\left(A_{i_2}\right)\cdot\ldots\cdot P(A_{i_r}).$$

*Se spune că evenimentele $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathbb{K}$ sunt **independente** k **câte** k, cu $k\in\mathbb{N}$, $2\leq k\leq n-1$, dacă oricare k evenimente dintre $A_1,A_2,\ldots,A_n$ sunt independente (în totalitate).*

Se spune că familia $\left(A_i\right)_{i\in I}$ de evenimente din $\mathbb{K}$ este **formată din evenimente independente** *(în totalitate) dacă orice subfamilie finită a sa este formată din evenimente independente (în totalitate).*

Se spune că familia $\left(A_i\right)_{i\in I}$ de evenimente din $\mathbb{K}$ este **formată din evenimente independente** k **câte** k, *cu $k\in\mathbb{N},k\geq 2$, dacă orice subfamilie finită cu cel puţin k elemente este formată din evenimente independente k câte k.*

Observaţia 2.1.13. **1.** *Propoziţia 2.1.11 se poate generaliza în sensul că dacă $\left(A_i\right)_{i=\overline{1,n}}$ (sau familia $\left(A_i\right)_{i\in I}$) este formată din evenimente independente (în totalitate sau k câte k) atunci proprietatea se păstrează dacă o parte dintre evenimente se înlocuiesc cu complementarele lor.*

2. *Evident, independenţa (în totalitate) implică independenţa k câte k. Reciproca acestei afirmaţii este falsă aşa cum rezultă şi din exemplul de mai jos datorat lui Cebâşev.*

Încheiem acest paragraf cu trei exemple care să ilustreze modul de utilizare al formulelor tratate (formula de adunare şi respectiv înmulţire a probabilităţilor, formula probabilităţii totale şi respectiv formula lui Bayes).

Exemplul 2.1.2. *Dintre cei 20 de studenţi ai unei grupe, 6 cunosc limba engleză, 5 cunosc limba franceză, 2 cunosc limba germană. Care este probabilitatea ca un student, luat la întâmplare din această grupă, să cunoască o limbă străină (dintre cele trei menţionate)?*

Rezolvare.

Considerăm evenimentele:

E: „studentul considerat cunoaşte limba engleză”,

F: „studentul considerat cunoaşte limba franceză”.

G: „studentul considerat cunoaşte limba germană”,

X: „studentul considerat vorbeşte o limbă străină (dintre cele trei)”.

Din definiţia clasică a probabilităţii avem

$$P(E) = \frac{6}{20}, \quad P(F) = \frac{5}{20}, \quad P(G) = \frac{2}{20}.$$

Cum $X = E \bigcup F \bigcup G$ şi evenimentele E, F, G nu sunt incompatibile două câte două rezultă folosind formula lui Poincaré că

$$\begin{aligned} P(X) &= P\left(E \bigcup F \bigcup G\right) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P\left(E \bigcap F\right) - P\left(E \bigcap G\right) \\ &\quad - P\left(F \bigcap G\right) + P\left(E \bigcap F \bigcap G\right). \end{aligned}$$

Evenimentele E, F, G, sunt independente în totalitate şi deci:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E) \cdot P(F) - P(E) \cdot P(G) - \\ &\quad - P(F) \cdot P(G) + P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) \\ &= \frac{6+5+2}{20} - \frac{6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{20 \cdot 20} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 2}{20 \cdot 20 \cdot 20} \\ &= \frac{13}{20} - \frac{52}{400} + \frac{3}{400} = \frac{211}{400}. \end{aligned}$$

Exemplul 2.1.3. *O urnă conţine a bile albe şi b bile negre. Se extrag succesiv, fără repunere, trei bile. Care este probabilitatea ca toate cele trei bile extrase să fie albe (presupunem $a \geq 3$)?*

Rezolvare.

Considerăm evenimentele:

A_i: „a i-a bilă extrasă a fost albă”, $i = \overline{1,3}$

X: „toate cele trei bile extrase au fost albe”.

Avem $X = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$. Din formula de înmulţire a probabilităţilor avem

$$P(X) = P(A_1)\ P(A_2 |_{A_1})\ P\left(A_3 |_{A_1 \bigcap A_2}\right).$$

Utilizând definiţia clasică a probabilităţii obţinem

$P(A_1) = \frac{a}{a+b}$, $P(A_2 |_{A_1}) = \frac{a-1}{a+b-1}$, $P\left(A_3 |_{A_1 \bigcap A_2}\right) = \frac{a-2}{a+b-2}$ şi deci

$P(X) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a-2}{a+b-2}$.

Exemplul 2.1.4. *Trei urne conţin bile albe şi bile negre în compoziţiile:*

$$U_1(a,b)\,,\ U_2(c,d)\,,\ U_3(e,f)\,.$$

Se extrage o bilă din U_3 şi dacă ea este albă se pune în U_1 şi se extrage o a doua bilă din U_1 iar dacă este neagră se pune în U_2 şi a doua bilă se extrage din U_2. Să se afle probabilităţile ca:

a) *a doua bilă extrasă să fie albă;*

b) *prima bilă extrasă să fi fost albă dacă a doua bilă extrasă a fost neagră.*

Rezolvare.

Considerăm evenimentele:
A_i: „a i-a bilă extrasă a fost albă”, $(i=\overline{1,2})$;
N_i: „a i-a bilă extrasă a fost neagră”, $(i=\overline{1,2})$.

a) Se cere $P(A_2)$. Rezolvarea este un exemplu de utilizare a formulei probabilităţii totale cu sistemul complet de evenimente A_1, N_1. Avem

$A_2 = A_2\bigcap\Omega = A_2\bigcap(A_1\bigcup N_1) = (A_2\bigcap A_1)\bigcup(A_2\bigcap N_1)$.

Cum $A_2\bigcap A_1$ şi $A_2\bigcap N_1$ sunt incompatibile rezultă că

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P\left(A_2\bigcap A_1\right)+P\left(A_2\bigcap N_1\right)\\ &= P(A_1)\,P(A_2\,|_{A_1})+P(N_1)\,P(A_2\,|_{N_1})\\ &= \frac{e}{e+f}\,\frac{a+1}{a+b+1}+\frac{f}{e+f}\,\frac{c}{c+d+1}. \end{aligned}$$

Analog,

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(A_1)\,P(N_2\,|_{A_1})+P(N_1)\,P(N_2\,|_{N_1})\\ &= \frac{e}{e+f}\,\frac{b}{a+b+1}+\frac{f}{e+f}\,\frac{d+1}{c+d+1} \end{aligned}$$

(sau $P(N_2)=1-P(A_2)$).

b) Se cere $P(A_1\,|_{N_2})$. Rezolvarea oferă un exemplu de utilizare a formulei lui Bayes care permite interschimbarea raportului de condiţionare apriori-aposteriori. Probabilitatea $P(A_1\,|_{N_2})$ ne este mai puţin la îndemână decât $P(N_2\,|_{A_1})$ iar formula lui Bayes ne permite calculul lui $P(A_1\,|_{N_2})$ cu ajutorul lui $P(N_2\,|_{A_1})$. Avem

$$P(A_1\,|_{N_2}) = \frac{P(A_1)\cdot P(N_2\,|_{A_1})}{P(N_2)} = \frac{\frac{e}{e+f}\cdot\frac{b}{a+b+1}}{\frac{e}{e+f}\cdot\frac{b}{a+b+1}+\frac{f}{e+f}\cdot\frac{d+1}{c+d+1}}.$$

2.2 Scheme clasice de probabilitate

Sub acest titlu vor fi descrise anumite experimente aleatoare şi vor fi calculate probabilităţile unor evenimente ale acestora. Din multiple motive aceste experimente aleatoare apar foarte des în aplicaţii. Tradiţional, descrierea experimentelor respective se face cu ajutorul unor urne din care se extrag bile.

În cele ce urmează vom înţelege prin **urnă** o incintă în care se află **bile** (sfere identice ca mărime şi greutate, dar putând avea culori diferite). Din exterior nu se pot vedea culorile bilelor din urnă, însă se consideră că există un mecanism cu ajutorul căruia bilele pot fi extrase din urnă, bilele existente în urnă având toate aceeaşi şansă de a fi extrase.

2.2.1 Schema urnei cu bila nerevenită

Urna U conţine a bile albe şi b bile negre. Din U se fac n extrageri succesive de câte o bilă fără întoarcere, adică fără a reintroduce în urnă bilele extrase. Să remarcăm că modul acesta de a extrage n bile din urna U este echivalent cu extragerea celor n bile deodată. Se pune problema determinării probabilităţii evenimentului $X_{a,b}^{k,l}$ că din cele n bile astfel extrase k sunt albe şi $l = n - k$ sunt negre. Evident că a, b, n, k şi l sunt numere naturale şi $n \leq a + b$, $k \leq \min\{n, a\}$, $l \leq \min\{n, b\}$.

Să ne imaginăm că cele $a + b$ bile existente în urna U ar fi numerotate de la 1 la $a + b$. Experimentul aleator al extragerii celor $n = k + l$ bile din această urnă are C_{a+b}^{k+l} rezultate posibile egal probabile. Dintre acestea, favorabile realizării evenimentului $X_{a,b}^{k,l}$ sunt $C_a^k C_b^l$ căci k bile dintre cele a bile albe existente în urnă pot fi alese în C_a^k moduri diferite, fiecărei asemenea alegeri corespunzându-i C_b^l moduri diferite de alegere a l bile dintre cele b bile negre existente în urna U.

Notăm

$$P_{a,b}(k, l) = P(X_{a,b}^{k,l}).$$

După definiţia clasică a probabilităţii se obţine

$$P_{a,b}(k, l) = \frac{C_a^k \cdot C_b^l}{C_{a+b}^{k+l}}. \tag{2.1}$$

Observaţia 2.2.1. *Din cauza asemănării membrului drept al relaţiei (2.1) cu termenul general al seriei hipergeometrice, schema urnei cu bila nerevenită se mai numeşte* ***schema hipergeometrică****.*

Exemplul 2.2.1. *Urna U conţine 3 bile albe şi 2 bile negre. Din U se extrag deodată 3 bile (sau echivalent, se fac 3 extrageri succesive de câte o bilă fără întoarcere). Să se calculeze probabilitatea evenimentului A că cel mult două din bilele astfel extrase sunt albe.*

Rezolvare.

Este clar că evenimentul A se realizează dacă din cele trei bile extrase din U exact două sunt albe, sau exact una este albă, sau nici una nu este albă, adică

$$A = X_{3,2}^{2,1} \bigcup X_{3,2}^{1,2} \bigcup X_{3,2}^{0,3}.$$

Evenimentele reuniunii care dă evenimentul A sunt evident două câte două incompatibile, deci

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X_{3,2}^{2,1}) + P(X_{3,2}^{1,2}) + P(X_{3,2}^{0,3}) \\ &= P_{3,2}(2,1) + P_{3,2}(1,2) + P_{3,2}(0,3). \end{aligned}$$

Dar $X_{3,2}^{0,3} = \emptyset$ deoarece este imposibil ca din urna U să fie extrase (fără întoarcere) 3 bile negre, ea conţinând doar 2 asemenea bile. Atunci

$$P_{3,2}(0,3) = P(X_{3,2}^{0,3}) = P(\emptyset) = 0$$

şi deci

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{3,2}(2,1) + P_{3,2}(1,2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} + \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} \\ &= \frac{3 \cdot 2}{10} + \frac{3 \cdot 1}{10} = \frac{9}{10} = 0,9. \end{aligned}$$

2.2.2 Generalizare. Schema urnei cu bila nerevenită cu mai multe stări

O generalizare naturală a schemei precedente se obţine considerând că în urnă se găsesc bile de mai mult decât două culori (stări), să zicem de s culori.

Urna U conţine a_i bile de culoarea c_i, $i=\overline{1,s}$. Din U se fac n extrageri succesive de câte o bilă fără întoarecere (ceea ce este echivalent cu extragerea celor n bile deodată). Se cere probabilitatea evenimentului $X_{a_1,a_2,\ldots,a_s}^{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ ca dintre cele n bile extrase k_i sunt de culoarea c_i, $i=\overline{1,s}$. Evident că $a_1,a_2,\ldots,a_s,k_1,k_2,\ldots,k_s$ şi n sunt numere naturale, $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=n$ şi $k_i\le\min\{a_i,n\}$, $i=\overline{1,s}$.

În acest caz numărul total de evenimente elementare ale experimentului aleator este $C_{a_1+a_2+\ldots+a_s}^{k_1+k_2+\ldots+k_s}$, iar numărul evenimentelor elementare favorabile evenimentului $X_{a_1,a_2,\ldots,a_s}^{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ este $C_{a_1}^{k_1}\cdot C_{a_2}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{a_s}^{k_s}$.

Notăm
$$P(X_{a_1,a_2,\ldots,a_s}^{k_1,k_2,\ldots,k_s})=P_{a_1,a_2,\ldots,a_s}(k_1,k_2,\ldots,k_s).$$

Definiţia clasică a probabilităţii dă
$$P_{a_1,a_2,\ldots,a_s}(k_1,k_2,\ldots,k_s)=\frac{C_{a_1}^{k_1}\cdot C_{a_2}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{a_s}^{k_s}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_s}^{k_1+k_2+\ldots+k_s}}. \tag{2.2}$$

Exemplul 2.2.2. *Dintre cele 10 bilete ale unei loterii unul este câştigător cu 10000 u.m., două sunt câştigătoare cu câte 5000 u.m., trei sunt câştigătoare cu câte 1000 u.m. şi patru sunt necăştigătoare. Un jucător cumpără patru bilete din această loterie. Să se calculeze probabilitatea p ca dintre cele patru bilete cumpărate unul să fie câştigător cu 5000 u.m., două să fie câştigătoare cu câte 1000 u.m. şi unul să fie necâştigător.*

Rezolvare.

Probabilitatea căutată poate fi calculată utilizând relaţia (2.2) şi se obţine
$$p=P_{1,2,3,4}(0,1,2,1)=\frac{C_1^0\cdot C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{210}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}\approx 0,114.$$

2.2.3 Schema urnei cu bila revenită

Urna U conţine bile de două culori (albe şi negre). Compoziţia urnei este cunoscută în sensul că se cunoaşte probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie albă (fie această probabilitate p) şi probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie neagră (o notăm cu q, $q=1-p$). Din U se efectuează n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere (adică după extragerea oricărei bile şi observarea culorii ei, bila extrasă este reintrodusă în urnă înaintea extragerii următoare). Se cere probabilitatea evenimentului X_n^k că dintre cele n bile astfel extrase k sunt albe (atunci restul de $n-k$ bile sunt negre). Evident k şi n sunt numere naturale şi $k\le n$.

Se obţine
$$P(X_n^k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}.$$

Observaţia 2.2.2. *Cum membrul drept al relaţiei (**??**) este coeficientul lui t^k din dezvoltarea cu formula binomului lui Newton a lui $(p+q)^n$, schema urnei cu bila revenită se mai numeşte **schema binomială**. Această schemă este numită şi **schema lui Bernoulli**. Esenţial în schema urnei cu bila revenită este faptul că, din cauza reintroducerii bilei în urnă după fiecare extragere, rezultatele extragerilor sunt evenimente total independente şi din acest motiv ea este uneori numită **schema extragerilor (probelor) repetate şi independente**, iar schema urnei cu bila nerevenită este numită atunci **schema extragerilor (probelor) repetate şi dependente**.*

Exemplul 2.2.3. *Urna U conţine 2 bile albe şi 3 bile negre. Din U se fac 6 extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcerea bilei în urnă după fiecare extragere. Să se calculeze probabilitatea ca 4 dintre cele 6 bile extrase să fie albe, iar 2 să fie negre.*

Rezolvare.

Cum la fiecare extragere putem obţine oricare dintre cele $2+3=5$ bile existente în urnă, fiecare extragere este un experiment aleator care generează câte un câmp de evenimente cu 5 rezultate posibile echiprobabile. Atunci, folosind definiţia clasică a probabilităţii, găsim că probabilitatea ca la oricare din cele 6 extrageri să se obţină o bilă albă este $p=\dfrac{2}{5}$, iar probabilitatea ca la oricare din cele 6 extrageri să se obţină o bilă neagră este $q=\dfrac{3}{5}$.

Probabilitatea ca 4 din cele 6 bile extrase să fie albe şi 2 să fie negre este

$$P_6(4)=C_6^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=15\cdot\frac{16}{625}\cdot\frac{9}{25}=\frac{432}{3125}=0,13824.$$

Observaţia 2.2.3. *Din schema urnei cu bila revenită se obţine următoarea schemă numită* ***schema lui Pascal****. Să presupunem că urna U conţine bile albe şi negre. Fie p probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie albă şi $q=1-p$ probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie neagră. Se cere probabilitatea evenimentului Y_n^k ca la efectuarea a n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere din urna U să se obţină k bile albe şi $n-k$ bile negre, iar a n-a bilă extrasă din U să fie albă (adică probabilitatea ca cea de a k-a bilă albă să se obţină după ce au fost extrase $n-k$ bile negre). Fără dificultate se obţine că probabilitatea acestui eveniment este*

$$P\left(Y_n^k\right)=P\left(X_{n-1}^{k-1}\bigcap A_n\right).$$

Deoarece rezultatul unei extrageri nu este influenţat de rezultatele extragerilor precedente (bila fiind reintrodusă în urnă după fiecare extragere) avem

$$\begin{aligned}P\left(Y_n^k\right)&=P\left(X_{n-1}^{k-1}\right)\cdot P\left(A_n\right)=P_{n-1}(k-1)\cdot p=\\&=C_{n-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot q^{(n-1)-(k-1)}p=C_{n-1}^{k-1}\cdot p^k\cdot q^{n-k}.\end{aligned}$$

Observaţia 2.2.4. *Din schema lui Pascal se obţine ca un caz particular* ***schema geometrică*** *luând $k=1$. Probabilitatea ca efectuând n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere din urna U (cunoscută în sensul că se ştie că probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie albă este p, iar probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie neagră este $q=1-p$) să se obţină pentru prima dată bilă albă în cea de a n-a extragere este*

$$\begin{aligned}P\left(Y_n^1\right)&=P\left(X_{n-1}^0\bigcap A_n\right)=P\left(X_{n-1}^0\right)\cdot P\left(A_n\right)=\\&=P_{n-1}(0)\cdot p=C_{n-1}^0\cdot p^0\cdot q^{n-1-0}\cdot p=p\cdot q^{n-1}.\end{aligned}$$

Denumirea de schema geometrică provine de la faptul că probabilitatea $p\cdot q^{n-1}$ este al n-lea termen al progresiei geometrice cu primul termen p şi raţia q.

2.2.4 Generalizare. Schema urnei cu bila revenită cu mai multe stări

Această schemă este o generalizare naturală a schemei urnei cu bila revenită, ea referindu-se la extrageri cu întoarcere dintr-o urnă în care există bile de mai mult decât două culori.

Urna U conţine bile de s culori $c_1, c_2, \ldots, c_s$, $s \in \mathbb{N}$, $s > 2$. Compoziţia urnei U este cunoscută în sensul că se cunoaşte probabilitatea ca o bilă extrasă din U să aibă culoarea c_i, $i = \overline{1, s}$. Fie această probabilitate p_i. Evident $p_i > 0$, $i = \overline{1, s}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = 1$.

Din U se fac n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere (adică, după extragerea oricărei bile şi observarea culorii ei, bila extrasă este reintrodusă în urnă înaintea extragerii următoare).

Se cere probabilitatea evenimentului $X_n^{k_1, k_2, \ldots, k_s}$ ca dintre cele n bile astfel extrase k_i să fie de culoarea c_i, $i = \overline{1, s}$. Evident $0 \leq k_i \leq n$, $i = \overline{1, s}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{s} k_i = n$.

Notăm $P(X_n^{k_1, k_2, \ldots, k_s}) = P_n(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ şi se poate deduce formula:

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_s!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}. \tag{2.3}$$

Remarcăm că dacă în (2.3) luăm $s = 2$ şi notăm $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p = q$, $k_1 = k$ şi $k_2 = n - k$ se obţine membrul drept al relaţiei (**??**).

Observaţia 2.2.5. *Deoarece membrul drept al relaţiei (2.3) este coeficientul lui* $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_s^{k_s}$ *din dezvoltarea lui*

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_s t_s)^n$$

schema urnei cu bila revenită cu mai multe stări se mai numeşte ***schema polinomială*** *sau* ***schema multinomială****.*

Exemplul 2.2.4. *Urna U conţine 2 bile roşii, 4 bile albe şi 3 bile albastre. Din U se fac 6 extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere. Se cere probabilitatea ca dintre cele 6 bile extrase una să fie roşie, două să fie albe şi trei să fie albastre.*

Rezolvare.

Avem evident $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2 = \frac{4}{9}$, $p_3 = \frac{3}{9}$, $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ şi $k_3 = 3$, deci probabilitatea cerută este

$$P_6(1, 2, 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{3}{9}\right)^3 \approx 0,0325.$$

2.2.5 Schema urnelor lui Poisson

Schema urnelor lui Poisson este o altă generalizare a schemei urnei cu bila revenită.

Experimentul de la schema urnei cu bila revenită studiată în secţiunea 2.2.3 poate fi imaginat şi în modul următor: există n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ cu compoziţii identice, din fiecare urnă se extrage câte o bilă şi se caută probabilitatea evenimentului ca dintre cele n bile astfel extrase k sunt albe.

O generalizare a acestui experiment se obţine considerând că cele n urne au compoziţii diferite.

Să presupunem date urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ şi că aceste urne conţin bile albe şi negre, compoziţiile urnelor sunt cunoscute în sensul că se ştie că probabilitatea ca o bilă extrasă din U_i să fie albă este p_i, $i = \overline{1, n}$ (atunci probabilitatea ca o bilă extrasă din U_i să fie neagră este $q_i = 1 - p_i$, $i = \overline{1, n}$). Se extrage câte o bilă din fiecare din cele n urne şi se cere probabilitatea evenimentului X^k că dintre cele n bile astfel extrase k sunt albe şi $n - k$ sunt negre. Evident $0 < p_i < 1$, $i = \overline{1, n}$ şi $0 \leq k \leq n$.

Dacă A_i este evenimentul că bila extrasă din U_i este albă atunci $P(A_i) = p_i$ şi $P(\overline{A_i}) = 1 - p_i = q_i$.

Se constată uşor că probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui t^k din polinomul $(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)\ldots(p_n t + q_q)$ de gradul n în t, astfel încât probabilitatea $P(X^k)$ este dată de relaţia

$$\sum_{k=0}^{n} P(X^k)t^k = \prod_{i=1}^{n}(p_i t + q_i). \tag{2.4}$$

Remarcăm faptul că dacă în schema urnelor lui Poisson considerăm toate cele n urne identice (adică $p_i = p$, $q_i = q$, $i = \overline{1,n}$) atunci relaţia (2.4) devine

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(X^k\right) t^k = (pt + q)^n,$$

astfel încât

$$P(X^k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

adică $P(X^k) = P_n(k)$ dat de relaţia (2.4).

Exemplul 2.2.5. *O întreprindere agricolă cultivă grâu în 3 ferme. Din date statistice se ştie că probabilitatea ca într-un an oarecare producţia de grâu la hectar să depăşească 3000 kg este $p_1 = 0,5$ la prima fermă, $p_2 = 0,4$ la a doua şi $p_3 = 0,6$ la ferma a treia. Se cere probabilitatea evenimentului X că într-un anumit an producţia de grâu la hectar să depăşească 4000 kg la cel puţin două din cele trei ferme.*

Rezolvare.

Notăm cu X^k evenimentul că exact în k dintre cele 3 ferme producţia de grâu în anul respectiv depăşeşte 3000 kg la hectar, $k = \overline{0,3}$. Se observă că evenimentul X^k este de tipul celor descrise în schema urnelor lui Poisson.

Avem

$$P(X) = P\left(X^2 \bigcup X^3\right) = P\left(X^2\right) + P\left(X^3\right).$$

Relaţia (2.4) ne dă

$$(0,4t + 0,6)(0,5t + 0,5)(0,6t + 0,4) = 0,12 + 0,38t + 0,38t^2 + 0,12t^3,$$

astfel că $P(X^2) = 0,38$ şi $P(X^3) = 0,12$, deci

$$P(X) = 0,38 + 0,12 = 0,50.$$

UNITATEA 2. Variabile aleatoare. Repartitii clasice de probabilitate

2.3 Variabile aleatoare

Până acum evenimentele au fost studiate mai întâi din punct de vedere calitativ, iar o dată cu introducerea probabilităţilor şi din punct de vedere cantitativ. Studiul se extinde prin considerarea unei noţiuni noi, aceea de **variabilă aleatoare**, variabilă care va juca un rol similar în teoria probabilităţilor ca şi variabila din cadrul analizei matematice sau din altă parte a matematicii.

În cazul variabilelor aleatoare valorile vor fi luate dintr-o anumită mulţime nu în mod cert ci numai cu o anumită probabilitate. Ca notaţie pentru variabila aleatoare se utilizează de obicei literele mari latine sau pot fi utilizate şi literele greceşti η, ζ, ...

Considerăm un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$.

Definiţia 2.3.1. *Se numeşte* ***variabilă aleatoare reală*** *orice aplicaţie*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

care asociază fiecărui element ω *un număr real* $X(\omega)$,

$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

astfel încât

$$X^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aici, prin $X^{-1}(-\infty, x)$ am notat evenimentul identificat cu mulţimea elementelor $\omega \in \Omega$ astfel încât $X(\omega) < x$, adică

$$X^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \,|\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) < x\}.$$

Observaţia 2.3.1. *În cele ce urmează vom avea în vedere două categorii de variabile aleatoare şi anume:*

– *variabile aleatoare* **de tip discret***;*

– *variabile aleatoare* **de tip continuu***.*

Variabilele aleatoare **de tip discret** *sunt acelea pentru care mulţimea valorilor (codomeniul lui X) este o mulţime finită sau numărabilă de forma*

$$M = \{x_i \mid x_i \in \mathbb{R}\}_{i \in I},\ I \subset \mathbb{N}.$$

Variabila aleatoare **de tip continuu** *este variabila a cărei codomeniu* M *este un interval* $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *închis sau nu.*

Exemplul 2.3.1. *Notăm cu* X *variabila aleatoare care reprezintă suma punctelor obţinute la aruncarea a două zaruri. Atunci*

$$M = \{2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 11, 12\}.$$

Exemplul 2.3.2. *Fie* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}$, $M = \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. *Arătăm că* $X : \Omega \to M$, $X(\omega_1) = x_1$, $X(\omega_2) = x_2$, $X(\omega_3) = x_2$ *este o variabilă aleatoare.*

Rezolvare.

$X^{-1}((-\infty,\, x)) = \emptyset \in \mathcal{K},$ pentru orice $x \leq x_1$;

$X^{-1}((-\infty,\, x)) = \{\omega_1\} \in \mathcal{K},$ pentru orice $x_1 < x \leq x_2$;

$X^{-1}((-\infty,\, x)) = \{\omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{K},$ pentru orice $x > x_2$.

Definiţia 2.3.2. *Dacă* X *este o variabilă aleatoare de tip discret atunci numim* **funcţie de probabilitate** *şi o notăm cu*

$$f_X : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

funcţia care asociază fiecărui

$$x_i \longmapsto f_X(x_i) = P(\{X = x_i\})$$

unde $\{X = x_i\}$ *reprezintă evenimentul ca variabila aleatoare discretă* X *ia valoarea* x_i.

Observaţia 2.3.2. *Atunci când nu e pericol de confuzie indicele X de la funcţia f se va omite şi vom nota $f(x_i)$ cu p_i, unde p_i reprezintă probabilitatea evenimentului ca variabila X să ia valoarea x_i. Se constată fără greutate că sistemul de evenimente $\{X = x_i\}_{i\in I}$ este un sistem complet de evenimente şi atunci vor fi îndeplinite* ***întotdeauna*** *următoarele două condiţii:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in I} p_i = 1; \\ p_i \geq 0,\ i \in I. \end{cases}$$

Astfel variabilei aleatoare de tip discret X i se asociază un tabel (tablou) de repartiţie (distribuţie) de forma

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I} \qquad \textit{sau detaliat} \quad X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Se vede că repartiţia (distribuţia) conţine pe prima linie valorile pe care variabila aleatoare le ia, de obicei scrise o singură dată şi în ordine crescătoare, iar pe linia a doua sunt trecute probabilităţile cu care variabila aleatoare X ia valoarea corespunzătoare p_i.

Exemplul 2.3.3. *Revenim la primul exemplu din această secţiune şi cerem în plus să construim distribuţia acestei variabile aleatoare. Atunci*

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Operaţii cu variabile aleatoare de tip discret

Ca şi cu variabilele obişnuite, şi cu variabilele aleatoare se pot face operaţii. Pentru fiecare nouă variabilă obţinută după efectuarea operaţiilor trebuie să cunoaştem tabloul de repartiţie.

1. Adunarea unei variabile aleatoare X cu un număr constant C:

$$C + X : \begin{pmatrix} C + x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I};$$

2. Înmulţirea unei variabile X cu o constantă C:

$$C \cdot X : \begin{pmatrix} C \cdot x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I};$$

3. Ridicarea la putere a unei variabile aleatoare X. Fie $k \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$X^k : \begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I},$$

Când au sens x_i^k se poate lua $k \in \mathbb{Z}$ sau chiar $k \in \mathbb{R}$.

4. Suma a două variabile aleatoare X şi Y:

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, Y : \begin{pmatrix} y_i \\ q_i \end{pmatrix}_{i\in I} \Longrightarrow X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{i\in I,\ j\in J},$$

unde

$$p_{ij} = P\left(\{X = x_i\} \bigcap \{Y = y_j\}\right).$$

Caz particular. Atunci când X şi Y sunt independente,

$$\{X = x_i\} \quad \bigcap \quad \{Y = y_j\}, \forall (i, j) \in I \times J$$

vor fi tot independente, deci p_{ij} este produsul $p_{ij} = p_i\, q_j$.

5. Produsul a două variabile aleatoare X şi Y:

$$X \cdot Y : \begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{i \in I,\, j \in J}, \; p_{ij} = P\left(\{X = x_i\} \bigcap \{Y = y_j\}\right).$$

Exemplul 2.3.4. *Se consideră variabilele aleatoare de distribuţii:*

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Presupunem că acestea sunt independente. Să se efectueze următoarele operaţii: $2X$, $3{+}Y$, X^4, $X{+}Y$, $X\,Y$, $\frac{X}{Y}$.
Rezolvare.

$$\begin{aligned}
2X &: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}; \\
3+Y &: \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}; \\
X^4 &: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 16 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}; \\
X+Y &: \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0.12 & 0.18 & 0.2 & 0.3 & 0.08 & 0.12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
X+Y &: \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0.12 & 0.2 & 0.26 & 0.3 & 0.12 \end{pmatrix}; \\
Y^{-1} &: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}; \\
\frac{X}{Y} &: \begin{pmatrix} (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} & (-1)\,1 = -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0.12 & 0.18 & 0.2 & 0.3 & 0.08 & 0.12 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\frac{X}{Y} &: \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0.26 & 0.5 & 0.12 & 0.12 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.3.2 Funcţia de repartiţie

Studiul variabilelor aleatoare se poate considera şi prin intermediul unei noi funcţii asociate variabilei aleatoare. Această funcţie numită uneori **funcţie cumulativă a probabilităţilor** are o serie de proprietăţi foarte uşor de exploatat, mai ales când e vorba de a evalua probabilităţile unor evenimente construite cu variabile aleatoare. Fie X o variabilă aleatoare discretă.

Definiţia 2.3.3. *Se numeşte* ***funcţie de repartiţie*** *asociată lui X, şi se notează cu*

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\,,$$

funcţia care asociază $x \longmapsto F_X(x)$, definită prin

$$F_X(x) \stackrel{def}{=} P(\{X < x\})\,.$$

Observaţia 2.3.3. *Atunci când nu există pericolul de confuzie se va renunţa la indicele X şi la acoladele din membrul drept şi vom folosi notaţia*

$$F(x) = P(X < x)\,.$$

Exemplul 2.3.5. *Să construim funcţia de repartiţie pentru variabila aleatoare X din Exemplul 2.3.4.*

Rezolvare.

Reprezentăm pe o axă valorile variabilei X. Studiem fiecare caz în parte:

Dacă $x \le -1 \Longrightarrow F(x) = P(X < x) = P(\emptyset) = 0$;
Dacă $-1 < x \le 0 \Longrightarrow F(x) = P(X < x) = P(x = -1) = 0.3$;
Dacă $0 < x \le 2 \Longrightarrow F(x) = P(X < x) = P(\{x = -1\} \cup \{x = 0\}) =$
$= 0.3 + 0.5 = 0.8$;
Dacă $x > 2 \Longrightarrow F(x) = P(X < x) = 1$.

Deci putem scrie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0.3, & -1 < x \le 0 \\ 0.8, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}\,.$$

Proprietăţi ale funcţiei de repartiţie.

Folosind doar definiţia şi proprietăţi ale probabilităţilor, se deduc următoarele proprietăţi ale funcţiei de repartiţie.

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

3) F este crescătoare: $\forall\ x',\ x'' \in \mathbb{R}$, are loc implicaţia

$$x' < x'' \Longrightarrow F(x') \le F(x'')\,;$$

4) F este continuă la stânga: $\forall\ x_\circ \in \mathbb{R}$,

$$F(x_\circ) = F(x_\circ - 0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < x_\circ}} F(x)\,;$$

5) $\forall x', x'' \in \mathbb{R}$,cu $x' < x''$, are loc egalitatea

$$P(x' \le X < x'') = F(x'') - F(x')\,.$$

Justificare: Pornim de la evenimentul $X < x''$.

Observaţia 2.3.4. *Plecând de la Proprietatea 5) se demonstrează că sunt adevărate relaţiile:*

$$\begin{aligned} P\left(x' \leq X \leq x''\right) &= F\left(x''\right) - F\left(x'\right) + P\left(X = x''\right); \\ P\left(x' < X < x''\right) &= F\left(x''\right) - F\left(x'\right) - P\left(X = x'\right); \\ P\left(x' < X \leq x''\right) &= F\left(x''\right) - F\left(x'\right) + P\left(X = x''\right) - P\left(X = x'\right). \end{aligned}$$

2.3.3 Variabile de tip continuu

În aplicaţii, variabilele aleatoare de tip discret nu sunt întotdeauna suficiente. Într-adevăr, există probleme care sunt descrise de variabile aleatoare ce nu sunt discrete.

Exemplul 2.3.6. *Greutatea unui produs este reprezentată printr-o variabilă aleatoare care ia orice valoare dintr-un anumit interval. Este nevoie să se aibă în vedere o variabilă aleatoare de tip continuu.*

Definiţia 2.3.4. *Variabila aleatoare reală X este* **de tip continuu** *dacă funcţia sa de repartiţie F este dată printr-o relaţie de forma:*

$$F\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} f\left(t\right) dt,$$

f fiind o funcţie integrabilă pe orice interval de forma $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare de tip continuu se bucură de aceleaşi proprietăţi ca şi în cazul variabilelor aleatoare de tip discret precum şi de proprietăţi specifice.

Observaţia 2.3.5. *Din definiţia de mai sus şi având în vedere proprietăţile integralelor, avem*

$$f(x) = F'_d(x) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Definiţia 2.3.5. *Funcţia f se numeşte* **funcţie densitate de probabilitate** *a variabilei aleatoare de tip continuu, şi are proprietăţi similare cu acelea ale funcţiei de probabilitate din cazul discret.*

Teorema 2.3.1. *Dacă F este funcţie de repartiţie a unei variabile aleatoare continue, atunci densitatea de probabilitate f are următoarele proprietăţi*

1) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$

Observaţia 2.3.6. *După cum în cazul variabilei aleatoare discrete aveam o aşa-zisă repartiţie, adică un tablou cu două linii, pe prima linie fiind trecute valorile variabilei, iar pe a doua funcţia de probabilitate, tot aşa şi la variabilele aleatoare de tip continuu vom considera o aşa numită* **repartiţie** *sau* **distribuţie**. *Astfel, pentru o variabilă aleatoare de tip continuu care ia valori doar dintr-un interval al axei reale, repartiţia va avea forma:*

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}$$

unde

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ şi } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

2.3.4 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Studiul variabilei aleatoare atât de tip discret cât şi de tip continuu se extinde prin introducerea unor caracteristici numerice cu ajutorul cărora se dau informaţii suplimentare despre ele. Aceste caracteristici se împart în mai multe categorii:

– *de grupare*: care evidenţiază nişte numere în jurul cărora se grupează valorile variabilelor;

– *de împrăştiere (de depărtare)*: care dau informaţii asupra gradului de depărtare a valorilor variabilelor faţă de o caracteristică de grupare principală;

– *privind forma distribuţiei*: simetrie, asimetrie, boltire, turtire, etc.

Caracteristici de grupare

Sunt nişte numere care se determină pornind de la variabila aleatoare considerată, numere în jurul cărora se grupează toate valorile variabilei aleatoare.

Valoarea medie. Valoarea medie este considerată cea mai importantă dintre caracteristicile de grupare.

Definiţia 2.3.6. *Se numeşte* **valoarea medie** *a variabilei aleatoare X şi se notează $M(X)$ numărul calculabil prin una din relaţiile*

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{i\in I} x_i p_i, \text{ dacă } X \text{ este variabilă aleatoare discretă;} \\ M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx, \text{ dacă } X \text{ este variabilă aleatoare continuă.} \end{aligned}$$

Exemplul 2.3.7. *Fie variabila aleatoare X având distribuţia*

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Valoare medie a lui X este

$$M(X) = -0.8 + 0.3 + 0.6 = 0,1.$$

Exemplul 2.3.8. *Fie variabila aleatoare X având distribuţia*

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}}, \text{ unde } \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Valoare medie a lui X este

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x\, 3x^2 dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Propoziţia 2.3.1. *Valoarea medie are câteva proprietăţi. Astfel dacă X şi Y sunt variabile aleatoare, c o constantă reală, avem*

1) $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$;

2) *$M(C) = c$, unde variabila aleatoare constantă $C : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$;*

3) *$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;*

4) *$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, dacă X, Y sunt independente;*

5) *$X_{min} \leq M(X) \leq X_{max}$, unde X_{min}, X_{max} sunt valorile minime şi maxime pe care le poate lua X;*

6) *$a \leq M(X) \leq b$ unde X este o variabilă aleatoare continuă, iar $[a, b]$ e intervalul pentru care $f_X(x) \neq 0$.*

Valoarea modală (moda).

Definiţia 2.3.7. *Se numeşte* **valoarea modală** *a variabilei aleatoare X numărul notat cu $M_\circ(X)$ care este valoarea variabilei X cu cea mai mare probabilitate (valoarea cea mai probabilă) pentru variabila aleatoare discretă, respectiv argumentul pentru care f are valoare maximă în cazul variabilelor de tip continuu.*

Exemplul 2.3.9. *Pentru variabila aleatoare prezentată în Exemplul 2.3.7 avem $M_\circ(X) = -2$.*

Exemplul 2.3.10. *Fie X din Exemplul 2.3.8. Avem $M_\circ(X) = 1$.*

Valoarea mediană.

Definiţia 2.3.8. *Se numeşte* **valoare mediană** *a variabilei aleatoare X numărul $M_e(X)$ care împarte repartiţia în două părţi egale, adică e este numărul pentru care $P(X \leq M_e(X)) \geq \frac{1}{2} \leq P(X \geq M_e(X))$.*

Observaţia 2.3.7. *În cazul când se utilizează funcţia de repartiţie din Definiţia 2.3.3 se deduce că*

$$F(M_e(X)) = \frac{1}{2}$$

adică valoarea mediană este soluţia inecuaţiilor

$$F(M_e(X)) \leq \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad F(M_e(X) + 0) \geq \frac{1}{2}.$$

Exemplul 2.3.11. *În cazul variabilei X din Exemplul 2.3.8 avem*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x 3t^2 dt, & x \in (0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & x \in (0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(x) = \frac{1}{2} \quad \text{adică} \quad x^3 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = M_e(X).$$

Momentele de ordin superior. În aceeaşi categorie de caracteristici de grupare figurează aşa zisele **momente de ordin superior**. În unele aplicaţii este nevoie să se utilizeze puterile naturale ale unei variabile aleatoare $X^2, X^3, \ldots, X^k$, valori pentru care caracteristicile de grupare principale joacă un rol important. Astfel introducem momentele de ordin superior în următoarea definiţie.

Definiţia 2.3.9. *Se numeşte* **moment de ordin** k *al variabilei aleatoare* X *şi se notează* ν_k *numărul*

$$\nu_k = M\left(X^k\right).$$

Se observă că $\nu_1 = M(X)$, $\nu_0 = 1$. Cele mai des utilizate în aplicaţii sunt ν_2, ν_3, ν_4.

Exemplul 2.3.12. *Fie* $X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$. *Atunci*

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= M\left(X^2\right) = (-2)^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 = 1,6 + 0,3 + 1,2 = 3,1;\\
\nu_3 &= M\left(X^3\right) = (-8) \cdot 0,4 + 0,3 + 8 \cdot 0,3 = 3,2 + 0,3 + 2,4 = 5,9;\\
\nu_4 &= M\left(X^4\right) = 16 \cdot 0,4 + 0,3 + 16 \cdot 0,3 = 6,4 + 0,3 + 4,8 = 11,5.
\end{aligned}$$

Exemplul 2.3.13. *Pentru* $X : \begin{pmatrix} x \\ 3x^2 \end{pmatrix}_{x\in[0,1]}$ *avem*

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \int_0^1 x^2 3x^2 dx = \frac{3}{5};\\
\nu_3 &= \int_0^1 x^3 3x^2 dx = \frac{1}{2};\\
\nu_4 &= \int_0^1 x^4 3x^2 dx = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

Caracteristici de împrăştiere (sau de depărtare)

După ce au fost analizate principalele caracteristici de grupare vom evidenţia cât de depărtate sunt valorile variabilei faţă de o valoare de grupare. Într-adevăr, valoarea medie dă informaţii asupra numărului în jurul căruia se grupează valorile variabilei, dar acestea nu sunt de ajuns. De exemplu în cazul variabilelor aleatoare care pot fi diferite dar să aibă aceeaşi valoare medie.

Exemplul 2.3.14. *Fie variabilele* $X_1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *şi* $X_2 : \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *Atunci*

$$M(X_1) = M(X_2) = 0,$$

cu toate că valorile lor diferă semnificativ.

Există mai multe caracteristici de împrăştiere. Cele mai des utilizate sunt

– dispersia (varianţa);

– abaterea medie pătratică;

– momente centrate de ordin superior.

Dispersia. Dispersia este cea mai importantă caracteristică de împrăştiere.

Definiţia 2.3.10. *Se numeşte* **dispersia** *variabilei aleatoare X numărul notat $D(X)$ definit ca valoare medie a pătratului variabilei aleatoare abatere $[X - M(X)]$, adică numărul*

$$D(X) = M\left[(X - M(X))^2\right].$$

Avem

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i\in I}(x_i - M(X))^2 p_i, \\ &\quad \text{dacă } X \text{ este variabilă aleatoare discretă;} \\ D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)\,dx, \\ &\quad \text{dacă } X \text{ e variabilă aleatoare continuă.} \end{aligned}$$

Propoziţia 2.3.2. *Dispersia are următoarele proprietăţi*

1) $D(X) \geq 0$;

2) $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$;

3) $D(c) = 0$;

4) $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$ *dacă X, Y sunt independente;*

5) $D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2 = \nu_2 - \nu_1^2$.

Exemplul 2.3.15. *Pentru* $X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$ *din Exemplul 2.3.7 avem valoarea medie $M(X) = 0.1$ şi dispersia*

$$D(X) = (-2 - 0,1)^2 \cdot 0,4 + (1 - 0,1)^2 \cdot 0,3 + (2 - 0,1)^2 \cdot 0,3 = 3,09$$

sau

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 = 3,1 - 0,01 = 3,09.$$

Exemplul 2.3.16. *În cazul variabilei aleatoare continue din Exemplul 2.3.8 avem*

$$D(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^2 dx = 3\int_0^1 (x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2)dx = \frac{3}{80},$$

sau

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Exemplul 2.3.17. *Pentru X_1 din exemplul 2.3.14 avem*

$$D(X_1) = (-1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

iar pentru X_2 din acelaşi exemplu aveam

$$D(X_2) = (-100 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (100 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{100^2}{2} = 10000.$$

Abaterea medie pătratică.

Definiţia 2.3.11. *Se numeşte* **abatere medie pătratică** *a variabilei aleatoare* X *şi se notează* $\sigma(X)$ *numărul dat prin relaţia*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Abaterea medie pătratică a fost introdusă pentru că unităţile de măsură ale acesteia sunt exact aceleaşi cu unităţile de măsură ale valorilor variabilei aleatoare.

Momentele centrate de ordin superior. Pentru $k \in \mathbb{N}$ se introduc ca o extensie a dispersiei, momentele centrate de ordin superior.

Definiţia 2.3.12. *Se numeşte* **moment centrat de ordinul** k *al variabilei aleatoare* X *şi se notează* μ_k *valoarea medie a puterii* k *a variabilei abatere*

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right].$$

Observaţia 2.3.8. *Momentele centrate de ordinul 1 şi 2 sunt* $\mu_1 = 0$ *şi* $\mu_2 = D(X)$*. Cele mai des utilizate sunt* μ_3*,* μ_4*.*

Teorema 2.3.2. *Între momentele centrate de ordin superior* μ_k *şi momentele de ordin superior* ν_k *există relaţia de legătură*

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i \cdot \nu_{k-i} \cdot (\nu_1)^i.$$

În particular avem

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2; \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3; \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4. \end{aligned}$$

Demonstraţia se face folosind definiţia 2.3.12 a momentului centrat de ordin superior, formula binomului lui Newton pentru $(X - M(X))^k$ şi proprietăţile valorii medii.

Cazul distribuţiilor clasice. Prezentăm în continuare valoarea medie şi dispersia în cazul variabilelor aleatoare care urmează distribuţii clasice.

Distribuţia	$M(X)$	$D(X)$
Binomială	np	npq
Hipergeometrică	$n\frac{a}{a+b}$	$n\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b}\frac{a+b-n}{a+b-1}$
Poisson	λ	λ
Pascal (Geometrică)	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Uniformă	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normală	m	σ^2

.

2.4 Repartiţii clasice

După cum s-a văzut în Capitolul precedent, există două clase de variabile aleatoare şi anume variabile aleatoare de tip discret şi de tip continuu. În acest capitol se vor evidenţia câteva astfel de variabile, de cele două tipuri, care sunt cunoscute şi sub denumirea de **repartiţii clasice**. Acestea sunt importante fie prin legătura lor cu diferite scheme clasice de probabilitate, fie funcţiile lor de probabilitate / densitate de probabilitate sunt funcţii cunoscute cu anumite proprietăţi remarcabile. Ele au fost studiate de-a lungul timpului de diferiţi matematicieni cărora unele le poartă numele.

2.4.1 Repartiţii clasice de tip discret

Acestea se împart la rândul lor în discrete simple şi numărabile după numărul de valori (finit sau infinit) pe care le pot avea. Prezentăm în continuare cele mai cunoscute repartiţii clasice de tip discret.

Repartiţia hipergeometrică

Definiţia 2.4.1. *Variabila aleatoare X de tip discret urmează* ***legea hipergeometrică*** *dacă distribuţia ei are forma:*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ P_{a,b}(k, n-k) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}, \quad \textit{unde} \quad P_{a,b}(k, n-k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

$a, b, n \in \mathbb{N}$ sunt parametrii distribuţiei care trebuie să îndeplinească condiţiile

$$n \leq a + b; \quad \max(0, n-b) \leq k \leq \min(n, a).$$

Observaţia 2.4.1. *Probabilităţile $P_{a,b}(k, n-k)$ din distribuţia lui X sunt cele de la schema urnei cu bila nerevenită cu două stări (schema hipergeometrică).*

Verificarea condiţiilor pentru ca $P_{a,b}(k, n-k)$ să fie o funcţie de probabilitate are loc în două etape.

1) $P_{a,b}\left(k, n-k\right) = \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} > 0;$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} P_{a,b}\left(k, n-k\right) = \dfrac{1}{C_{a+b}^n} \sum\limits_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = 1.$

A doua relaţie are loc dacă se ţine seama de **relaţia lui Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n.$$

Aceasta se demonstrează prin identificarea coeficienţilor lui x^n din egalitatea

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b, \quad n \leq a+b.$$

Notăm în cele ce urmează

$$p = \frac{a}{a+b}, \quad q = \frac{b}{a+b}$$

probabilităţile evenimentelor ca la prima extragere să se obţină o bilă de culoarea din care avem a bile, respectiv de culoarea din care avem b bile. Este atunci imediată egalitatea

$$p+q=1.$$

Ne propunem să calculăm în continuare principalele caracteristici numerice pentru distribuţia hipergeometrică, şi anume valoarea medie şi dispersia.

Calculul valorii medii pentru distribuţia hipergeometrică Conform relaţiei de definiţie avem

$$M\left(X\right)=\sum_{k=0}^{n}kP_{a,b}\left(k,n-k\right)=\frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=1}^{n}kC_{a}^{k}C_{b}^{n-k}.$$

Modificăm produsul kC_a^k astfel:

$$kC_{a}^{k}=k\frac{a!}{k!\left(a-k\right)!}=a\frac{\left(a-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(a-k\right)!}=aC_{a-1}^{k-1}.$$

Atunci, pentru valoarea medie avem folosind relaţia lui Vandermonde

$$M\left(X\right)=\frac{a}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=1}^{n}kC_{a-1}^{k-1}C_{b}^{n-k}=\frac{a}{C_{a+b}^{n}}C_{a+b-1}^{n-1}.$$

Se efectuează simplificările după scrierea explicită a combinărilor şi obţinem

$$M\left(X\right)=n\cdot\frac{a}{a+b}=n\cdot p.$$

Calculul dispersiei pentru distribuţia hipergeometrică Vom porni cu formula de calcul a dispersiei şi anume

$$D\left(X\right)=M\left(X^{2}\right)-\left[M\left(X\right)\right]^{2}.$$

Calculăm pentru început momentul de ordinul doi

$$\begin{aligned}M\left(X^{2}\right)&=\sum_{k=0}^{n}k^{2}P_{a,b}\left(k,n-k\right)=\frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=1}^{n}k^{2}C_{a}^{k}C_{b}^{n-k}\\&=\frac{1}{C_{a+b}^{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(k-1\right)+k\right]C_{a}^{k}C_{b}^{n-k}\\&=\frac{1}{C_{a+b}^{n}}\left[\sum_{k=2}^{n}k\left(k-1\right)C_{a}^{k}C_{b}^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}kC_{a}^{k}C_{b}^{n-k}\right].\end{aligned}$$

Se evaluează următoarele expresii

$$k\left(k-1\right)C_{a}^{k}=k\left(k-1\right)\frac{a!}{k!\left(a-k\right)!}=$$

$$=a\left(a-1\right)\frac{\left(a-2\right)!}{\left(k-2\right)!\left(a-k\right)!}=a\left(a-1\right)C_{a-2}^{k-2},\quad k\geq2;$$

$$kC_a^k = aC_{a-1}^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Momentul de ordinul doi se va scrie succesiv după cum urmează (se foloseşte relaţia lui Vandermonde):

$$\begin{aligned} M\left(X^2\right) &= \frac{a}{C_{a+b}^n}\sum_{k=1}^{n} C_{a-1}^{k-1}C_b^{n-k} + \frac{a\left(a-1\right)}{C_{a+b}^n}\sum_{k=2}^{n} C_{a-2}^{k-2}C_b^{n-k} \\ &= \frac{a}{C_{a+b}^n}C_{a+b-1}^{n-1} + \frac{a\left(a-1\right)}{C_{a+b}^n}C_{a+b-2}^{n-2} \\ &= n\frac{a}{a+b} + n\left(n-1\right)\frac{a\left(a-1\right)}{\left(a+b\right)\left(a+b-1\right)}. \end{aligned}$$

Ştiind că $M\left(X\right) = n\frac{a}{a+b}$, putem calcula dispersia astfel:

$$\begin{aligned} D\left(X\right) &= M\left(X^2\right) - \left[M\left(X\right)\right]^2 \\ &= n\frac{a}{a+b} + n\left(n-1\right)\frac{a\left(a-1\right)}{\left(a+b\right)\left(a+b-1\right)} - n^2\frac{a^2}{\left(a+b\right)^2} \\ &= n\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a+b-n}{a+b-1} \end{aligned}$$

sau

$$D\left(X\right) = n\cdot p\cdot q\frac{a+b-n}{a+b-1}.$$

În concluzie, pentru repartiţia hipergeometrică avem

$$M\left(X\right) = n\cdot p$$
$$D^2\left(X\right) = n\cdot p\cdot q\frac{a+b-n}{a+b-1}$$

cu $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$.

Repartiţia binomială

Definiţia 2.4.2. *Variabila aleatoare de tip discret urmează* ***legea binomială*** *dacă distribuţia ei are forma:*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ P\left(n,k\right) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$$

unde $P\left(n,k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p \in [0,1], \quad q = 1-p.$

Observaţia 2.4.2. *Probabilităţile* $P\left(n,k\right)$ *din distribuţia lui* X *sunt cele de la schema urnei lui Bernoulli (schema binomială).*

Condiţiile din definiţia unei funcţii de probabilitate sunt verificate de $P\left(n,k\right)$ după cum urmează:

1) $P(n,k) = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0;$

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} P(n,k) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$

Calculul valorii medii pentru distribuţia binomială

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(n,k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}.$$

Exprimăm produsul kC_n^k astfel

$$kC_n^k = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Atunci avem

$$M(X) = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k} q^{n-1-k} = np\,(p+q)^{n-1} = np$$

deci $M(X) = n \cdot p.$

Calculul dispersiei pentru distribuţia binomială Pornim cu relaţia de calcul a dispersiei şi anume

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2$$

iar momentul de ordinul doi este

$$M\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(n,k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} [k(k-1)+k]\, C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, C_n^k p^k q^{n-k} + np.$$

Se evaluează produsul $k(k-1)\,C_n^k$ astfel:

$$k(k-1)\,C_n^k = k(k-1)\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = n(n-1)\,\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-k)!}$$

şi avem

$$\begin{aligned} M\left(X^2\right) &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\, C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k} + np = \\ &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k} + np = \\ &= n(n-1)\,p^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} p^k q^{n-2-k} + np = \\ &= n(n-1)\,p^2\,(p+q)^{n-2} + np = \\ &= n(n-1)\,p^2 + np. \end{aligned}$$

Atunci, pentru dispersie avem

$$D(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

sau

$$D(X) = npq.$$

În concluzie, la repartiţia binomială avem

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

Observaţia 2.4.3. *La repartiţia hipergeometrică am introdus notaţiile* $p = \dfrac{a}{a+b}$ *şi* $q = \dfrac{b}{a+b}$ *şi dacă facem ca* $a + b \to \infty$ *obţinem din repartiţia hipergeometrică repartiţia binomială.*

Repartiţia Poisson

Definiţia 2.4.3. *Variabila aleatoare* X *de tip discret urmează* **legea Poisson** *dacă distribuţia ei are forma*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ P_\lambda(k) \end{pmatrix}_{k=0,1,2,\ldots}$$

unde $P_\lambda(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ *şi* $\lambda > 0$.

Condiţiile pentru funcţia de probabilitate se verifică astfel

1) $P_\lambda(k)\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} > 0$ pentru $\lambda > 0$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_\lambda(k) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

unde am ţinut cont de dezvoltarea în serie Mac Laurin a funcţiei e^x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Calculul valorii medii pentru repartiţia Poisson

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_\lambda(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

Calculul dispersiei pentru repartiţia Poisson

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2$$

Momentul de ordinul doi se calculează astfel

$$\begin{aligned} M\left(X^2\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_\lambda(k) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left[k(k-1)+k\right]\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

Atunci dispersia este

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

În concluzie, la repartiţia Poisson avem

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Observaţia 2.4.4. *Dacă variabila aleatoare X urmează legea binomială, adică are distribuţia*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ P(n,k) \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}} \quad \text{unde} \quad P(n,k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

şi dacă $p = p_n$ astfel încât $np_n = \lambda > 0$, atunci pentru $n \to \infty$, X urmează legea lui Poisson, adică

$$\lim_{n\to\infty} P(n,k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Într-adevăr, dacă $p = p_n = \dfrac{\lambda}{n}$ şi $q = 1 - p = 1 - \dfrac{\lambda}{n}$ atunci putem scrie

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(n,k) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Observaţia 2.4.5. *Deoarece $np_n = \lambda$, când $n \to \infty$ probabilitatea p_n este mică. Această probabilitate se consideră ca fiind probabilitatea de apariţie a unui eveniment. Ea fiind mică, legea lui Poisson se mai numeşte şi* **legea evenimentelor rare**.

Repartiţia geometrică

Definiţia 2.4.4. *Variabila aleatoare X de tip discret urmează* **legea geometrică** *dacă distribuţia ei are forma:*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ P(k) \end{pmatrix}_{k=1,2,3,\dots}$$

unde $P(k) = pq^{k-1}$, $p \in (0,1)$ şi $q = 1 - p$.

Verificarea condiţiilor pentru funcţia de probabilitate:

1) $P(k) = pq^{k-1} > 0$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(k) = p\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p\dfrac{1}{1-q} = 1.$

unde s-a folosit formula pentru suma seriei geometrice de raţie subunitară q:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Observaţia 2.4.6. *Probabilităţile $P(k)$ sunt cele din schema geometrică.*

Calculul valorii medii pentru repartiţia geometrică

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Considerăm suma

$$\begin{aligned} s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} &= 1 + 2q + 3q^2 + \ldots = \left(q + q^2 + q^3 + \ldots\right) \\ &= \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

Atunci avem

$$M(X) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Calculul dispersiei pentru repartiţia geometrică Pornim de la relaţia de calcul

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2$$

iar momentul de ordinul doi este

$$M\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}.$$

Considerăm sumele

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = 1 + 2^2 q + 3^2 q + \ldots \\ qs_1 &= q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots \\ (qs_1)' &= 1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \ldots \end{aligned}$$

de unde avem că

$$s_2 = (qs_1)' = \left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]' = \frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

Atunci

$$M\left(X^2\right) = ps_2 = \frac{1+q}{p^2}$$

iar

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

În concluzie, pentru repartiţia geometrică avem

$$M(X) = \frac{1}{p},\ D(X) = \frac{q}{p^2},\ \text{ cu } p+q=1.$$

Definiţia 2.4.5. *Variabila aleatoare X de tip discret urmează* **legea lui Pascal** *dacă are distribuţia de forma:*

$$X : \begin{pmatrix} k \\ P(n,k) \end{pmatrix}_{k=0,1,2,\ldots}$$

unde $P(n,k) = C_{n+k-1}^{k} p^n q^k$, $p \in (0,1)$ şi $q = 1-p$.

Observaţia 2.4.7. *Probabilităţile $P(n,k)$ sunt cele de la schema lui Pascal.*

Observaţia 2.4.8. *În cazul particular $n = 1$, variabila aleatoare X urmează legea geometrică.*

2.4.2 Repartiţii clasice de tip continuu

Repartiţia uniformă

Definiţia 2.4.6. *Variabila aleatoare X de tip continuu urmează* **legea uniformă** *dacă distribuţia ei are forma:*

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}}$$

unde densitatea ei de probabilitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Verificarea condiţiilor pentru funcţia densitate de probabilitate:

1) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ pentru $a < b$;

2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x}{b-a}\right|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$

Funcţia de repartiţie Folosim definiţia funcţiei de repartiţie, şi anume

$$F:\mathbb{R}\to[0,1]\,,\ F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

şi distingem următoarele cazuri:

– dacă $x\le a$, atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\ dt=0;$$

– dacă $a<x\le b$, atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0\ dt+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=0+\left.\frac{t}{b-a}\right|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a};$$

– dacă $x>b$ atunci

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0\ dt+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dt+\int_{b}^{x}0\ dt=\left.\frac{t}{b-a}\right|_{a}^{b}=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

În concluzie, funcţia de repartiţie pentru repartiţia uniformă este dată prin

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Calculul valorii medii pentru repartiţia uniformă Folosim relaţia de calcul pentru valoarea medie în cazul continuu şi anume

$$M(X)=\int_{\mathbb{R}}x\cdot f(x)\,dx=\int_{a}^{b}x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{b}=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

deci

$$M(X)=\frac{a+b}{2}.$$

Calculul dispersiei pentru repartiţia uniformă Folosim din nou relaţia

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$$

şi avem

$$M\left(X^2\right)=\int_{\mathbb{R}}x^2\cdot f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}x^2dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{a}^{b}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

deci

$$M\left(X^2\right)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

şi dispersia este

$$D(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

În concluzie, pentru variabila aleatoare care are repartiţia uniformă, avem

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Repartiţia normală

Această repartiţie este deosebit de importantă deoarece s-a constatat că multe fenomene empirice sunt descrise de legea normală. Graficul densităţii de probabilitate este numit şi **curba** sau **clopotul lui Gauss**.

Definiţia 2.4.7. *Variabila aleatoare X de tip continuu urmează* ***legea normală*** *dacă distribuţia ei are forma:*

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x;m,\sigma) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}}$$

unde

$$f(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

iar m şi σ sunt parametrii repartiţiei, cu $m, \sigma \in \mathbb{R}$ şi $\sigma > 0$.

Verificarea condiţiilor pentru funcţia densitate de probabilitate:

1) $f(x;m,\sigma) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$, $sigma > 0$;

2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x;m,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$

Se face substituţia

$$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$$

de unde obţinem:

$$x - m = \sqrt{2}\sigma u \quad \text{sau} \quad x = m + \sqrt{2}\sigma u \quad \text{şi} \quad dx = \sqrt{2}\sigma du.$$

Atunci avem

$$\int_{\mathbb{R}} f(x;m,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$$

unde s-a folosit valoarea integralei Euler-Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Funcţia de repartiţie

$$F:\mathbb{R}\to[0,1],$$

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dtu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Facem substituţia

$$\frac{t-m}{\sigma}=y\Longrightarrow t=\sigma y+m\quad \text{şi}\quad dt=\sigma dy.$$

Atunci

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{y^2}{2}}\sigma dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),\end{aligned}$$

unde $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este **funcţia integrală a lui Laplace dată** prin

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy,$$

pentru valorile căreia există tabele.

Proprietăţile funcţiei lui Laplace sunt:

a) $\Phi(0)=0$; **b)** $\Phi(+\infty)=\frac{1}{2}$;

c) $\Phi(-\infty)=-\frac{1}{2}$; **d)** $\Phi(-z)=-\Phi(z)$, $z\in\mathbb{R}$.

În concluzie, funcţia de repartiţie pentru repartiţia normală este

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Observaţia 2.4.9. *Folosind funcţia lui Laplace putem da formule de calcul pentru următoarele probabilităţi*

1) $P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$;

2) $P(m-r<X<m+r)=P(|X-m|<r)=$
$=\Phi\left(\frac{m+r-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{m-r-m}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right).$

Dacă $r=k\sigma$ avem

$$P(|X-m|<k\sigma)=2\Phi(k)$$

de unde obţinem prin particularizare

$$\begin{aligned}P(|X-m|<\sigma)&=2\Phi(1)=0,6826;\\P(|X-m|<2\sigma)&=2\Phi(2)=0,9544;\\P(|X-m|<3\sigma)&=2\Phi(3)=0,9972.\end{aligned}$$

Calculul valorii medii pentru repartiţia normală

$$M(X)=\int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x;m,\sigma)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Facem din nou substituţia

$$u=\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\Longrightarrow x=m+\sqrt{2}\sigma u,\quad dx=\sqrt{2}\sigma du$$

şi obţinem

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(m+\sqrt{2}\sigma u\right)e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[m\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du+\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-u^2}du\right].$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$$

şi atunci, pentru că a doua integrală este nulă (integrala unei funcţii impare pe interval simetric faţă de origine),

$$M(X)=m,$$

deci parametrul m este tocmai media repartiţiei normale.

Calculul dispersiei pentru repartiţia normală De această dată vom folosi definiţia dispersiei ca fiind momentul centrat de ordinul doi şi avem:

$$D(X)=\int_{\mathbb{R}}(x-m)^2\cdot f(x;m,\sigma)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Facem substituţia $u=\dfrac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ şi avem $(x-m)^2=2\sigma^2u^2$ de unde obţinem

$$\begin{aligned}D(X)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}2\sigma^2u^2e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du\\&=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-u^2}du=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u\left(e^{-u^2}\right)'du\\&=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}ue^{-u^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=\sigma^2\end{aligned}$$

deci parametrul σ este tocmai abaterea medie pătratică pentru repartiţia normală.

2.5 Exerciţii şi probleme rezolvate

Problema 2.5.1. *Se studiază alegerea unui proiect de modernizare a unei companii. S-au prezentat 3 proiecte care pot fi viabile sau nu. Dacă notăm cu A_i, $i = \overline{1,3}$, evenimentul 'proiectul i este viabil", să se exprime în funcţie de A_1, A_2, A_3 următoarele evenimente:*

a) toate proiectele sunt viabile;
b) cel puţin un proiect este viabil;
c) două proiecte sunt viabile;
d) cel mult două proiecte sunt viabile;
e) un singur proiect este viabil.

Soluţie: Notăm cu $\bar{A}_i$, $i = \overline{1,3}$, evenimentul ,,proiectul i nu este viabil".

a) Notăm cu A evenimentul ,,toate proiectele sunt viabile" $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, adică toate cele 3 proiecte sunt rentabile.

b) Notăm cu B evenimentul ,,cel puţin un proiect este viabil" şi astfel putem scrie $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

c) Notăm cu C evenimentul ,,două proiecte sunt viabile".
$C = \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_3 \cap A_3\right)$

d) Notăm cu D evenimentul ,,cel mult două proiecte sunt viabile". Evenimentul D este echivalent cu a spune că: nici un proiect nu este viabil, doar un proiect este viabil sau două proiecte sunt viabile.
$D = \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup C.$

e) Notăm cu E evenimentul ,,un singur proiect este viabil". Atunci:
$E = \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right).$

Problema 2.5.2. *O monedă este aruncată de 3 ori şi secvenţa de mărci şi steme este înregistrată.*

a) Scrieţi spaţiul evenimentelor elementare Ω
b) Scrieţi următoarele evenimente, folosind evenimentele elementare:
A-să apară cel puţin 2 steme
B-primele 2 aruncări sunt steme
C-ultima aruncare este marcă
c) Determinaţi următoarele evenimente:
1) C_A ;   2) $A \cap B$;   3) $A \cup C$

Soluţie: Spaţiul evenimentelor aleatoare Ω este:
$\Omega = \{SSS, SSM, SMS, MSS, MMS, MSM, SMM, MMM\}$, unde cu S notăm apariţia stemei, iar cu M apariţia mărcii.

b) Evenimentele A, B, C,se scriu folosind evenimentele elementare din Ω după cum urmează:
$A = \{SSS, SSM, SMS, MSS\}$
$B = \{SSM, SSS\}$
$C = \{SSM, SMM, MMM, MSM\}$

c) Evenimentele C_A, $A \cap B, A \cup B$ se scriu folosind punctul b) astfel:
$C_A = \bar{A} = \{SMM, MMM, MMS, MSM\}$
$A \cap B = \{SSM, SSS\}$
$A \cup C = \{SSS, SSM, SMS, MSS, SMM, MMM, MSM\}$

Problema 2.5.3. *Presupunem că într-o cameră sunt 5 persoane. Care este probabilitatea ca cel puţin 2 persoane să aibă aceiaşi zi de naştere.*

Soluţie: Fie A evenimentul ,,cel puţin 2 persoane au aceiaşi zi de naştere". Atunci $\bar{A}$ este evenimentul ,,cele 5 persoane au zile de natere diferite"

Presupunem că anul are 365 zile

Aşadar $P\left(\bar{A}\right)=\frac{365\ 364\ 363\ 362\ 361}{365^5}$

Deci, $P\left(A\right)=1-\ P\left(\bar{A}\right)=1-\frac{365\ 364\ 363\ 362\ 361}{365^5}$

Problema 2.5.4. *In România numerele de înmatriculare ale maşinilor au 7 caractere: 2 litere urmate de 2 cifre şi alte trei litere. Dacă toate secvenţele de 7 caractere sunt egal probabile, care este probabilitatea ca numărul de înmatriculare al unei maşini noi să nu conţină cifre şi litere identice?*

Soluţie: Notăm cu A evenimentul cerut.

Alfabetul conţine 26 litere, iar cifrele de pe numărul de înmatriculare pot fi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Numărul total de plăcuţe de înmatriculare este $26^5\times 10^2$(corespunzătoare celor 5 litere şi 2 cifre). Numărul plăcuţelor ce conţin litere şi cifre diferite este: $(26\ 25)\times(10\ 9)\times(24\ 23\ 22)$ (corespunzătoare primelor 2 litere diferite, urmate de 2 cifre diferite şi alte trei litere diferite de primele 2 şi diferite între ele).

Deci, $P\left(A\right)=\frac{26\ 25\ 10\ 9\ 24\ 23\ 22}{26^5 10^2}=0,597$

Problema 2.5.5. *Fie* $P_B\left(A\right)=\frac{1}{2}$, $P_{\bar{B}}\left(A\right)=\frac{1}{2}$ *şi* $P_A\left(B\right)=\frac{1}{2}$. *Se cere :*

a) să se determine $P\left(A\right)$ *şi* $P\left(B\right)$.

b) evenimentele A *şi* B *sunt independente?*

Soluţie: Folosind definiţia probabilităţii condiţionate se obţinė:

$P_B\left(A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$

$P_{\bar{B}}\left(A\right)=\frac{P\left(A\cap\bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\frac{P(A\backslash B)}{1-P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{1}{2}$

$P_A\left(B\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$

Dacă notăm $P\left(A\right)=x,\ P\left(B\right)=y,\ P\left(A\cap B\right)=z,$ se obţine sistemul liniar:

$\left\{\begin{array}{c}\frac{z}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{x-z}{1-y}=\frac{1}{2}\\ \frac{z}{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}z=\frac{1}{2}y\\ z=\frac{1}{2}x\\ x-z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y\end{array}\right.$, de unde prin calcule $x=\frac{1}{2},\ \ y=\frac{1}{2},\ \ z=\frac{1}{4}$.

In concluzie: $\quad P\left(A\right)=\frac{1}{2},\quad P\left(B\right)=\frac{1}{2}$

Condiţia ca evenimentele A şi B să fie independente este: $\quad P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)\ P\left(B\right)$

Deoarece $P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}=P\left(A\right)\ P\left(B\right)$ se obţine că evenimentele A şi B sunt independente.

Problema 2.5.6. *O firmă de asigurări are clienţi din 3 categorii de risc: ridicat, mediu, scăzut, care au respectiv probabilităţile de a cere despăgubiri în caz de accidente: 0,02, 0,01, 0,0025 într-un an. Proporţiile celor 3 categorii de clienţi în cadrul companiei sunt respectiv 10%, 20%, 70%. Care este probabilitatea ca un client al firmei să fie despăgubit? Care este proporţia de despăgubiri ce provin într-un an de la clienţii cu risc ridicat?*

Soluţie: Notăm cu B evenimentul ,,un client al companiei este despăgubit"şi cu:

A_1-evenimentul ,,clientul provine din categoria de risc ridicat"

A_2-evenimentul ,,clientul provine din categoria de risc mediu"

A_3-evenimentul ,,clientul provine din categoria de risc scăzut"

Sistemul $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$, formează un sistem complet de evenimente deoarece reuniunea lor este evenimentul sigur Ω şi sunt două câte două incompatibile. Astfel conform formulei probabilităţii totale:

$P\left(B\right)=P\left(A_1\right)\ P\left(\frac{B}{A_1}\right)+P\left(A_2\right)\ P\left(\frac{B}{A_2}\right)+P\left(A_3\right)\ P\left(\frac{B}{A_3}\right)=0,1\ 0,02+0,2\ 0,01+0,7\ 0,025=0,00575.$

Pentru a răspunde la a doua întrebare folosim formula lui Bayes:
$P\left(A_1/B\right)=\frac{P(A_1)\ P(B/A_1)}{P(A_1)\ P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)}=\frac{0{,}1\ 0{,}02}{0{,}00575}=0,347.$

Problema 2.5.7. *La o loterie sunt 100 bilete, din care 10 sunt câştigătoare. Opersoană cumpără 15 bilete. Săse determine probabilitatea ca:*

a) 1 bilet să fie câştigător;

b) să se obţină toate cele 10 bilete câştigătoare;

c) cel puţin 2 bilete să fie câştigătoare.

Rezolvare: Se aplică schema urnei cu 2 stări şi bila nerevenită.

a) $P_{10,90}\left(1,14\right)=\frac{C_{10}^{1}\ C_{90}^{14}}{C_{100}^{15}}$ b) $P_{10,90}\left(10,5\right)=\frac{C_{10}^{10}\ C_{90}^{5}}{C_{100}^{15}}$

c) Fie A evenimentul ca ,,cel puţin 2 bilete să fie câştigătoare,,. Considerăm $\bar{A}$ evenimentul contrar ca ca cel mult unul din cele 15 cumpărate să fie câştigător. Are loc:

$P\left(\bar{A}\right)=P_{10,90}\left(0,15\right)+P_{10,90}\left(1,14\right)=\frac{C_{10}^{0}\ C_{90}^{15}}{C_{100}^{15}}+\frac{C_{10}^{1}\ C_{90}^{14}}{C_{100}^{15}}$

Probabilitatea cerută va fi $P\left(A\right)=1-P\left(\bar{A}\right)$

Problema 2.5.8. *Un depozit de piese auto are în stoc piese de la 4 furnizori în următoarele cantităţi: 100 de la furnizorul F_1, 50 de la F_2, 30 de la F_3 şi 80 de la F_4.*

In decursul unei săptămâni, depozitul a vândut 45 piese. Care e probabilitatea ca din cele 45 de piese vândute, 15 să provină de la furnizorul F_1, 5 de la F_2, 10 de la F_3 şi 15 de la F_4.

Rezolvare: Se aplică schema urnei cu 4 stări şi bila nerevenită, unde $a_1=100, a_2=50, a_3=30, a_4=80$ $k_1=15, k_2=5, k_3=10, k_4=15$. Probabilitatea cerută este:

$P_{100,50,30,80}\left(15,5,10,15\right)=\frac{C_{100}^{15}\ C_{50}^{5}\ C_{30}^{10}\ C_{80}^{15}}{C_{260}^{45}}$

Problema 2.5.9. *Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicţia cursului valutar, astfel încât cursul poate să crească zilnic cu probabilitatea $\frac{1}{4}$, respectiv să scadă cu probabilitatea $\frac{3}{4}$. Stabiliţi probabilitatea ca:*

a) în 5 zile ale săptămânii cursul valutar să crească;

b) în cel mult 3 zile cursul valutar să crească;

c) în cel puţin 2 zile cursul valutar să crească;

Rezolvare: Considerăm evenimentul A ,,cursul valutar să crească într-o zi,,. In fiecare zi poate avea loc A sau $\bar{A}$.

Se aplică schema urnei cu 2 stări şi bila revenită (schema binomială), unde: $n=7$, $p=P\left(A\right)=\frac{1}{4}$, $q=P\left(\bar{A}\right)=\frac{3}{4}$,

Probabilitatea de a se produce A de k ori este: $P\left(k\right)=C_7^k\, p^k q^{7-k}$.

a) Probabilitatea cerută este: $P_7\left(5\right)=C_7^5\, p^5 q^{7-5}=C_7^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^2$

b) Probabilitatea cerută este:

$\sum\limits_{k=0}^{3}P_7\left(k\right)=\sum\limits_{k=0}^{3}C_7^k\, p^k\, q^{7-k}=\sum\limits_{k=0}^{3}C_7^k\ \left(\frac{1}{4}\right)^k\ \left(\frac{3}{4}\right)^{7-k}.$

c) Notăm cu C evenimentul ,,cursul valutar să crească în cel puţin 2 zile,,. Atunci $\overline{C}$ este evenimentul: ,,cursul valutar să nu crească în nici o zi sau să crească într-o zi,,. Aşadar putem scrie:

$P\left(\overline{C}\right)=P_7\left(0\right)+P_7\left(1\right)=C_7^0\ \left(\frac{1}{4}\right)^0\ \left(\frac{3}{4}\right)^7+C_7^1\ \left(\frac{1}{4}\right)^1\ \left(\frac{3}{4}\right)^6$

Probabilitatea cerută este:

$P\left(C\right)=1-P\left(\bar{C}\right)$.

Problema 2.5.10. *Un supermarket vinde următoarele sortimente de cafea: naturală, cappuccino şi expresso. Probabilitatea ca un client să cumpere cafea naturală este 0,55, cappuccino 0,3, iar expresso 0,15.*

Determinaţi probabilitatea ca din 100 clienţi, 70 să cumpere cafea naturală, 20 să cumpere cappuccino, iar 10 să cumpere expresso.

Rezolvare: Aplicăm schema urnei cu 3 stări şi bila revenită (schema multinomială)
Fie A_i, evenimentul ca un client să cumpere sortimentul i de cafea , $i = \overline{1,3}$. Avem evident:
$p_1 = P(A_1) = 0,55$, $p_2 = P(A_2) = 0,3$, $p_3 = P(A_3) = 0,15$, $n = 100$, $k_1 = 70$, $k_2 = 20$, $k_3 = 10$
Probabilitatea cerută este:
$P_{100}(70, 20, 10) = \frac{100!}{70!20!10!}\,(0,55)^{70}\,(0,30)^{20}\,(0,15)^{10}$

Problema 2.5.11. *Care e probabilitatea ca al 80-lea client care intră într-o bancă, să fie a 20-a persoană care încheie o poliţă de asigurare, ştiind că probabilitatea ca cineva să încheie o poliţă de asigurare este de 0,6.*

Rezolvare: Se aplică schema lui Pascal cu $n = 80$ (numărul clienţilor), $k = 20$ (numărul succeselor), $p = 0,6$, $q = 0,4$.

Probabilitatea cerută este: $C_{n-1}^{k-1}\,p^k\,q^{n-k} = C_{79}^{19}\,(0,6)^{20}\,(0,4)^{60}$.

Problema 2.5.12. *La trei reprezentanţe ale concernului Nokia se găsesc telefoane mobile cu ecran color sau alb-negru în următoarele proporţii: la prima reprezentanţă 14 cu ecran color şi 16 cu ecran alb-negru, la a doua 13 cu ecran color şi 17 cu ecran alb-negru, iar la a treia 14 cu ecran color şi 18 cu ecran alb-negru. Se alege la întâmplare câte un telefon mobil de la fiecare reprezentanţă, pentru a fi supus unor probe de verificare. Care e probabilitatea ca din cele 3 telefoane alese două să fie cu ecran color, iar unul cu ecran alb-negru?*

Rezolvare: Aplicăm schema lui Poisson. Pentru aceasta notăm cu p_i probabilitatea ca telefonul ales de la reprezentanţa i să aibă ecran color, $i = \overline{1,3}$. Avem că:
$p_1 = \frac{14}{30}$, $q_1 = \frac{16}{30}$, $p_2 = \frac{13}{30}$, $q_2 = \frac{17}{30}$, $p_3 = \frac{14}{32}$, $q_3 = \frac{18}{32}$
Conform schemei lui Poisson, probabilitatea cerută este dată de coeficientul lui t^2 al polinomului
$(p_1 t + q_1)\,(p_2 t + q_2)\,(p_3 t + q_3)$
adică de:

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \frac{14}{30}\frac{13}{30}\frac{18}{32} + \frac{14}{30}\frac{17}{30}\frac{14}{32} + \frac{16}{30}\frac{13}{30}\frac{14}{32} = 0,33.$$

Problema 2.5.13. *Variabila aleatoare discretă X ia valorile $-1, 0, 1$ cu probabilităţile p_1, $\frac{1}{3}$ şi respectiv p_3. Să se determine*

a) *probabilităţile p_1 şi p_3 ştiind că valoarea medie a variabilei aleatoare X este $\frac{1}{3}$;*

b) *abaterea medie pătratică;*

c) *momentul centrat de ordinul trei;*

d) *valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare $Y = 3X + 2$.*

Rezolvare.

a) Valoarea medie a variabilei aleatoare de tip discret X este

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = (-1) \cdot p_1 + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot p_3 = \frac{1}{3},$$

prin urmare $p_3 - p_1 = \frac{1}{3}$.

Mai ştim că $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i = 1,$ prin urmare $p_1 + \frac{1}{3} + p_3 = 1$. Aşadar obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} p_3 - p_1 = \frac{1}{3} \\ p_1 + p_3 + \frac{1}{3} = 1 \end{cases}$$

având soluţiile $p_1 = \frac{1}{6}$ şi $p_3 = \frac{1}{2}$. Prin urmare distribuţia variabilei aleatoare date este

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Dispersia variabilei aleatoare X o putem calcula cu ajutorul formulei

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2.$$

Ştiind că valoarea medie $M(X) = \frac{1}{3}$, mai rămâne de calculat valoare medie $M\left(X^2\right)$:

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Prin urmare

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Aşadar obţinem abaterea medie pătratică

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

c) Momentul centrat de ordinul 3 al variabilei X este

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M\left[(X - M(X))^3\right] = M\left[\left(X - \frac{1}{3}\right)^3\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(X_i - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot p_i = \\ &= \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Cunoscând faptul că momentul centrat de ordinul k se poate exprima şi cu ajutorul momentelor de ordinul k prin formula

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, \nu_{k-i} \, \upsilon_1^i,$$

putem obţine rezultatul de mai sus astfel

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_{1.}^3$$

Momentul de ordinul 3 al variabilei aleatoare X este

$$\nu_3 = M\left(X^3\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 \cdot p_i = \frac{1}{3}.$$

Prin urmare momentul centrat de ordinul 3 este

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{7}{27}.$$

d) Folosindu-ne de proprietăţile valorii medii şi a dispersiei obţinem:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M(3X+2) = 3 \cdot M(X) + 2 = 3; \\ D(Y) &= D(3X+2) = 3^2 \cdot D(X) = 5. \end{aligned}$$

Problema 2.5.14. *Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate*

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea medie şi dispersia.

Rezolvare. Valoarea medie a variabilei aleatoare de tip continuu este

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2.$$

Pentru dispersie folosim formula

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2,$$

unde

$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Prin urmare $D(X) = 6 - 4 = 2$, iar abaterea medie pătratică este

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$$

Problema 2.5.15. *O variabilă aleatoare X urmează legea binomială cu valoarea medie egală cu 300 şi dispersia egală cu 100. Să se afle n, p şi q.*

Rezolvare. Variabila aleatoare ce urmează legea binomială are $M(X) = n \cdot p$ şi $D(X) = n \cdot p \cdot q$. Prin urmare $n \cdot p = 300$ şi $n \cdot p \cdot q = 100$. Efectuând substituţia obţinem $300\,q = 100$. Prin urmare $q = \frac{1}{3}$. Rezultă de aici că $p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ şi prin urmare $n = \frac{300}{p}$, deci $n = 450$.

Problema 2.5.16. *Probabilitatea cu care se consumă energie electrică într-o unitate comercială într-o zi este 0,8. Fie X numărul zilelor din săptămână când consumul este normal. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X şi să se calculeze valoarea sa medie şi dispersia.*

Rezolvare. Se observă că variabila aleatoare X urmează legea binomială de parametrii: $n = 7$ (sunt 7 zile într-o săptămână), $p = 0,8$ (probabilitatea să se consume energie electrică în unitatea comercială) şi $q = 1 - p = 0,2$.

Distribuţia variabilei aleatoare este următoarea:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_7^k \cdot (0,8)^k \cdot (0,2)^{7-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,7}}$$

Valoarea medie este dată de formula: $M(X) = n \cdot p = 7 \cdot 0,8 = 5,6$.

Dispersia este: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 7 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 5,6 \cdot 0,2 = 11,2$.

Problema 2.5.17. *O agenţie imobiliară are spre vânzare un imobil cu 10 apartamente. Patru dintre acestea sunt cu o singură cameră. În decurs de o săptămână s-au prezentat la agenţia imobiliară 3 cumpărători. Fie X numărul clienţilor ce au cumpărat apartamente cu o cameră. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X şi să se calculeze valoarea medie şi dispersia ei.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X urmează legea hipergeometrică de parametrii $n = 3,\ a = 4,\ b = 6, p = 0,4,\ q = 0,6$.

Distribuţia variabilei aleatoare X este:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{pmatrix}.$$

cu $p(k) \geq 0,\ k = \overline{0,3}$ şi $\sum\limits_{k=0}^{3} p(k) = 1$, unde $p(k)\ ,\ k = \overline{0,3}$ reprezintă probabilităţile evenimentelor ca din cele trei apartamente cumpărate k să fie cu o singură cameră. Aceste probabilităţi sunt calculate cu ajutorul schemei hipergeometrică şi sunt egale cu:

$$p(k) = \frac{C_4^k C_6^{3-k}}{C_{10}^3},\ k = \overline{0,3}.$$

Se obţine $p(0) = \frac{1}{6},\ p(1) = \frac{1}{2},\ p(2) = \frac{3}{10}$ şi $p(3) = \frac{1}{30}$.

Prin urmare distribuţia lui X este:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

X urmând legea hipergeometrică are:

$$M(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0,4 = 1,2$$

şi

$$D(X) = n \cdot p \cdot q \frac{a+b-n}{a+b-1} = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot \frac{10-3}{10-1} = 1,2 \cdot 0,6 \cdot \frac{7}{9} = 0,56.$$

Problema 2.5.18. *O variabilă aleatoare X urmează legea binomială cu parametrii $n = 4$ şi $p = \frac{1}{4}$.*

a) *Scrieţi distribuţia variabilei aleatoare X.*

b) *Scrieţi funcţia densitate de probabilitate a variabilei aleatoare normale cu aceiaşi valoare medie şi dispersie ca şi X.*

c) *Calculaţi $P(1 \leq X < 2)$.*

Rezolvare. **a)** Distribuţia variabilei aleatoare X ce urmează legea binomială este:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_4^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,4}}$$

b) Valoarea medie şi dispersia pentru variabila aleatoare X sunt:
$M(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ şi $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.
Dacă variabila aleatoare X' urmează legea normală cu funcţia densitate de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

şi având media şi dispersia egale cu cele ale variabilei aleatoare X, atunci: $m = M(X') = M(X) = 1$ şi $\sigma^2 = D(X') = D(X) = \frac{3}{4}$.

Prin urmare $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, e^{-\frac{2(x-1)^2}{3}}$.

c) $P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = \sum\limits_{k=0}^{2} p(k) - \sum\limits_{k=0}^{1} p(k) = p(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,21.$

Problema 2.5.19. *Variabila aleatoare X urmează legea uniformă având valoarea medie şi dispersia egale cu 4 respectiv $\frac{1}{3}$. Să se scrie funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X.*

Rezolvare. Dacă variabila aleatoare X urmează legea uniformă pe intervalul (a, b) atunci funcţia de repartiţie va fi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

iar valoarea medie şi dispersia se calculează ca $M(X) = \frac{a+b}{2}$, respectiv $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Aşadar obţinem sistemul:

$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$ cu soluţia $a = 3$, $b = 5$.

Rezultă că funcţia de repartiţie va fi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ \frac{x-3}{2}, & 3 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

2.6 Teme de control

1. O monedă este aruncată de 3 ori şi secvenţa de mărci (M) şi steme (S) ce apare este înregistrată.
   a) Scrieţi spaţiul evenimentelor elementare Ω
   b) Scrieţi următoarele evenimente, folosind evenimentele elementare: A: "să apară cel puţin 2 steme" B: "primele 2 aruncări sunt steme" C: "ultima aruncare este marcă"
   c) Determinaţi următoarele evenimente: $\overline{A}$; $A \cap B$; $A \cup C$.

2. În drum spre locul de muncă un om trece prin 3 intersecţii consecutive, semaforizate. La fiecare semafor se opreşte sau îşi continuă drumul. Dacă notăm cu A_i, $i = \overline{1,3}$ evenimentul "la intersecţia i persoana îşi continuă drumul", să se exprime folosind A_1, A_2, A_3 următoarele evenimente:

   a) persoana are liber la toate intersecţiile
   b) persoana opreşte la toate intersecţiile
   c) persoana opreşte la cel puţin o intersecţie
   d) persoana opreşte la cel mult o intersecţie.

3. La un telescaun pentru ski aşteaptă 5 persoane. Un telescaun poate transporta doar 3 persoane odată.

   a) În câte moduri se poate organiza primul grup?
   b) Care este probabilitatea ca o persoană aleasă aleator dintre cei 5 să fie în primul transport? Dar în al doilea?

   Răspuns. 10, 0.6 şi 0.4

4. Se aruncă o monedă de două ori. Care este probabilitatea ca marca să apară cel puţin o dată? **Răspuns.** 0.75

5. Se aruncă 2 zaruri. Care este probabilitatea ca suma lor să fie:

   a) 8
   b) un număr prim
   c) cel puţin 4.

   Răspuns. 5/36, 5/12, 11/12

6. Se aruncă 2 zaruri. Care este probabilitatea ca suma feţelor să fie 6, ştiind că suma acestor feţe a dat un număr par?
   Răspuns. 5/18

7. Presupunem că într-o cameră sunt 5 persoane. Care este probabilitatea ca cel puţin 2 persoane să aibă aceeaşi zi de naştere.
   Răspuns. 1-0.972865=0.027135

8. Un lift ce conţine 5 persoane se poate opri la oricare din cele 7 etaje ale unei clădiri. Care este probabilitatea ca 2 persoane să nu coboare la acelaşi etaj?
   Răspuns. 0.15.

9. Un card emis de o bancă are ca număr de identificare un număr de 7 cifre, ce nu poate începe cu cifra 0. Care sunt probabilităţile ca un număr de identificare:

   a) să înceapă cu 456;

   b) să nu conţină cifre identice;

   c) să se termine cu 21.

   Răspuns. 0.0011, 0.006048, 0.01

10. Într-o grupă de studenţi sunt 30 care vorbesc limba engleză, 15 vorbitori de limba germană şi 8 studenţi care cunosc limba franceză. Dintre cei vorbitori de limba engleză, 10 vorbesc şi limba germană, iar 3 vorbesc şi limba franceză. Pe de altă parte avem 3 studenţi care vorbesc şi limba germană, şi limba franceză. Ştiind că, este un singur student care vorbeşte toate cele trei limbi, determinaţi numărul total al studenţilor din această grupă.
    Răspuns. 38

11. Un student se pregăteşte pentru 2 examene. Pe baza pregătirii sale el va promova primul examen cu o probabilitate de 60%, iar al doilea examen cu o probabilitate de 50%. Dacă rezultatele de la cele două examene sunt independente,

    a) care este probabilitatea de a promova ambele examene?

    b) care este probabilitatea de a promova cel puţin unul dintre cele două examene?

    Răspuns. 0.3, 0.8

12. Daltonismul este o tulburare a vederii cromatice (constând în incapacitatea de a deosebi unele culori), care afectează 8% din populaţia masculină şi 1% din populaţia feminină. În România un nou-născut este fată cu o probabilitate de 51%. Determinaţi care este probabilitatea ca un nou-născut din România să sufere de daltonism.
    Răspuns. Utilizând formula probabilităţii totale avem 0.0443

13. La un workshop participă patru firme. Firmele sunt reprezentate de 4, 3, 3, respectiv 5 angajaţi. Dintre aceşti reprezentanţi 1, 1, 1, 2 vorbesc limba germană. Un investitor din Germania este interesat de aceste firme şi se adresează unui reprezentant. Care este probabilitatea ca reprezentantul ales aleator, să vorbească limba germană? Care este probabilitatea ca, dacă, un reprezentant ales aleator vorbeşte limba germană, atunci el provine de la a patra firmă?
    Răspuns. Folosind formula probilităţii totale şi formula lui Bayes se obţine 0.3333 respectiv 0.4.

14. O companie produce în 3 schimburi. Intr-o anumită zi, 1% din articolele produse de primul schimb sunt defecte, 2% din cele produse în al doilea schimb şi 3% din al treilea schimb. Dacă cele trei schimburi au aceeaşi productivitate, care este probabilitatea ca un produs din acea zi să fie defect? Dacă un produs este defect, care este probabilitatea ca el să fi fost fabricat în schimbul al treilea?
    Răspuns. Folosind formula probilităţii totale şi formula lui Bayes se obţine 0.02 respectiv 0.5.

15. Pentru a participa la un proiect, dintr-o grupă cu 35 studenţi (20 fete, 15 băieţi) se aleg aleator 7 persoane. Care este probabilitatea ca între studenţii aleşi să fie:

a) exact 3 fete;

b) exact 2 băieţi;

c) cel mult 1 băiat.

Răspuns. 0,2314, 0,2420, 0,97

16. Un magazin are în stoc marfă de la 5 furnizori în următoarele cantităţi: 30 de la furnizorul F_1, 100 de la F_2, 50 de la F_3, 80 de la F_4 şi 40 de la F_5. În decursul unei săptămâni, depozitul a vândut 50 bucăţi. Care e probabilitatea ca din cele 50 de bucăţi vândute, 10 să provină de la furnizorul F_1, 5 de la F_2, 10 de la F_3, 15 de la F_4 şi 10 de la F_5.

17. Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicţia cursului valutar, astfel încât zilnic cursul poate să crească cu probabilitatea $\frac{1}{6}$, respectiv să scadă cu probabilitatea $\frac{5}{6}$. Stabiliţi probabilitatea ca:

    a) în 4 zile ale săptămânii cursul valutar să crească;

    b) în cel mult 2 zile cursul valutar să crească;

    c) în cel puţin 2 zile cursul valutar să crească.

    Răspuns. 0,0156, 0,9042, 0,3302

18. Un supermarket vinde următoarele sortimente de cafea: naturală, cappuccino şi expresso. Probabilitatea ca un client să cumpere cafea naturală este 0,6, cappuccino 0,3, iar expresso 0,1. Determinaţi probabilitatea ca, din 500 clienţi, 250 să cumpere cafea naturală, 120 să cumpere cappuccino, iar 130 să cumpere expresso.

19. Care e probabilitatea ca al 100-lea client ce intră într-o bancă, să fie a 40-a persoană ce încheie un contract de creditare, dacă probabilitatea ca cineva să încheie un astfel de contract este de 0,75?

20. La trei reprezentanţe de telefonie mobilă se găsesc telefoane mobile clasice şi android în următoarele proporţii: la prima reprezentanţă 20 clasice şi 30 android, la a doua 23 clasice şi 37 android, iar la a treia 34 clasice şi 36 android. Se alege la întâmplare câte un telefon mobil de la fiecare reprezentanţă, pentru a fi supus unor probe de verificare. Care e probabilitatea ca din cele 3 telefoane alese unul să fie clasic, iar două android? **Răspuns.** 0,4249

21. În catedrala Sfântul Anton din Padova, un vizitator este turist străin cu o probabilitate de 80%. Fiecare turist cumpără un suvenir cu o probabilitate de 60%, în timp ce localnicii cumpără suvenir cu o probabilitate de doar 5%. Să se determine probabilitatea cu care un vizitator cumpără un suvenir şi probabilitatea ca al 30-lea vizitator să fie a 10-a persoană care cumpără suvenir. **Răspuns.** 0,49, 0,0113

22. Alegem câte un costum de la 4 producători diferiţi. La primul producător probabilitatea ca un costum să aibă vreun defect de fabricaţie este de 2%, la al doilea producător este de 3%, la al treilea este 5% şi la al patrulea este 7%. Determinaţi probabilitatea evenimentului ca nici unul dintre cele 4 costume alese să nu fie cu defect. Dacă de la primul producător şi de la al patrulea alegem câte un costum şi de la al doilea şi al treilea câte două costume, cu ce probabilitate nu vom avea nici un costum defect printre cele 6 alese? **Răspuns.** 0,8399, 0,7739

23. Într-un lot de 400 piese, 10 sunt defecte. Se aleg aleator 20 piese. Să se calculeze probabilitatea ca între piesele alese :

   a) 4 piese să fie defecte;

   b) să fie cel mult 2 piese defecte;

24. O comisie internaţională este formată din 5 români, 7 italieni, 4 olandezi şi 6 elveţieni. Se aleg la întâmplare 10 persoane pentru a forma o subcomisie. Să se calculeze probabilitatea ca din cele 10 persoane alese, 2 să fie români, 3 italieni, 3 olandezi şi 2 elveţieni. **Răspuns.** 0,0325

25. Pe parcursul a 10 zile de vară s-a dat prognoza meteo astfel încât zilnic pot cădea precipitaţii cu probabilitatea 0,2. Calcula ţi probabilitatea de a ploua:

   a) în 3 zile;

   b) în cel mult 2 zile;

   c) în cel puţin 3 zile. **Răspuns.** 0,2013, 0,6778, 0,3222

26. Se aruncă un zar de 20 de ori. Să se calculeze probabilitatea ca de 8 ori să apară un număr prim, de 10 ori un număr compus şi de 2 ori faţa cu un punct. **Răspuns.** 0,1347

27. Avem 4 grupe de studenţi: în prima grupă sunt 20 fete şi 5 băieţi, în a doua grupă sunt 15 fete şi 10 băieţi, în a treia grupă sunt 10 fete şi 15 băieţi, în a patra grupă sunt 24 fete şi 1 băiat. Se alege câte un student din fiecare grupă pentru a participa la o acţiune publicitară pentru promovarea unui produs. Să se calculeze probabilitatea ca între studenţii aleşi:

   a) trei să fie fete;

   b) să fie numai fete;

   c) să fie cel puţin o fată. **Răspuns.** 0,4531, 0,1843, 0,9981

28. Un magazin oferă o promoţie clienţilor. La fiecare cumpărătură cu valoarea peste 50 RON, cumpărătorul primeşte un bilet de răzuit. Dacă clientul reuşeşte să colecteze 3 bilete cu logo-ul magazinului, el primeşte un voucher de cumpărături în valoare de 200 RON. Probabilitatea ca pe un bilet să apară logo-ul magazinului este de 10%. Care este probabilitatea evenimentului ca un cumpărător:

   a) să găsească al 3-lea logo pe al 10-lea bilet?

   b) să obţină primul logo pe al 10-lea bilet? **Răspuns.** 0,0172, 0,0387

29. Probabilităţile ca dimensiunile unei piese de maşină să fie în limite mai mici, respectiv mai mari decât cele admisibile sunt de respectiv 0.07 şi 0.1, iar probabilitatea ca o piesă să aibe dimensiunile în limite admisibile este 0.83. Dintr-un lot de 1000 de piese se extrag 140. Care este probabilitatea ca 5 dintre aceste piese să aibe dimensiunile mai mici decât cele admisibile şi 7 mai mari decât cele admisibile.

30. Într-un oraş există 5 magazine de desfacere a berii. Fiecare magazin pune în vănzare cate 3 tipuri de bere. Se cunosc cantităţile zilnice puse în vânzare din fiecare marcă de bere la fiecare magazin: $M_1(130, 200, 50); M_2(125, 190, 45); M_3(120, 120, 120); M_4(147, 156, 200); M_5(130, 123, 100)$. O persoană bine dispusă intră în fiecare magazin, fiind primul client al fiecărui magazin din respectiva zi, şi cumpără câte o bere. Calculaţi probabilitatea ca dintre cele 5 beri 4 să fie din primul fel respectiv probabilitatea ca cel puţin una să fie din primul fel de bere. **Răspuns.** 0,0412, 0,8694

31. La o baltă privată, la care se pescuieşte în sistem "prinde şi eliberează", se estimează că la fiecare lansare există 45% şanse de a prinde un peşte. Calculaţi probabilitatea ca din 10 lansări să fie prinşi 7 peşti (ştiind că se poate prinde cel mult un peşte la fiecare lansare). Dar probabilitatea ca din 7 încercări să fie prinşi doi peşti iar al doilea la a 7-a lansare? **Răspuns.** 0,0738, 0,0611

32. Un acelaşi tip de contract încheiat la 3 bănci diferite se dovedeste a fi performant cu probabilităţile $0,9$, $0,8$ si $0,7$. Să se scrie distribuţia X a numărului de contracte performante din cele trei analizate. Scrieţi funcţia de repartiţie $F_X(x)$.

33. Se consideră 3 urne, fiecare dintre ele conţinând 30 de bile albe şi negre. Prima urnă conţine 15 bile albe, a doua 10 bile albe şi a treia 6 bile albe. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Notăm cu X numărul bilelor albe extrase. Scrieţi distribuţia lui X, funcţia sa de repartiţie şi apoi reprezentaţi-o grafic. Calculaţi $P(0 \leq X < 2)$, $P(-1 < X < 1)$ şi $P(0 < X \leq 3)$.

34. Fie variabilele aleatoare independente X şi Y cu distribuţiile

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Să se calculeze: $X^3,\ Y^2,\ 3X,\ X+Y, XY,\ 3X+Y^2$.

35. Determinaţi p şi q astfel încât

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{p}{4} & \frac{1}{3} & \frac{q}{3} \end{pmatrix} \text{ şi } Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{p+1}{4} & q \end{pmatrix}$$

să reprezinte distribuţiile a două variabile aleatoare de tip discret. Scrieţi $F_X(x)$ şi $F_Y(y)$. Calculaţi $P\left(0 < X < \dfrac{1}{2}\right)$ şi $P\left(-1 < Y < \dfrac{2}{3}\right)$.

36. Considerăm variabilele aleatoare independente

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p+\frac{1}{6} & q+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ şi } Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p+q & p^2 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie distribuţia variabilei $2XY$.

37. Să se determine constanta a astfel încât funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ a^2x^3, x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}a^2xe^{-x+1}, x > 1 \end{cases}$$

să reprezinte densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare de tip continuu. Scrieţi funcţia de repartiţie.

38. Să se determine a astfel încat funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & x \in [1, e] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă X de tip continuu. Să se determine apoi funcţia de repartiţie corespunzătoare acestei variabile aleatoare. Calculaţi $P(0 \leq X \leq e)$.

39. Probabilitatea de a avea consum normal de energie într-o anumită companie este 0.8. Dacă notăm cu X variabila aleatoare ce reprezintă numărul de zile dintr-o săptămână în care consumul de energie este normal în acea companie, să se scrie distribuţia lui X, funcţia de repartiţie a lui X, să se reprezinte grafic această funcţie iar apoi să se calculeze $P(1 \leq X \leq 3)$. Să se calculeze valoare medie, dispersia şi abaterea medie pătratică.

40. Se aruncă o monedă de 3 ori consecutiv. Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul de mărci apărute. Scrieţi distribuţia lui X, funcţia sa de repartiţie şi apoi să se calculeze valoare medie, dispersia şi abaterea medie pătratică.

41. Fie v.a. discretă: $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

   a) Determinaţi p_2, p_3 ştiind că valoarea medie a v.a. X este 5/4
   b) Calculaţi momentele de ordinul 2 şi 3 pentru v.a X
   c) Calculaţi dispersia, abaterea medie pătratică şi momentele centrate de ordinul 2 şi 3
   d) Calculaţi valoarea medie şi dispersia pentru v.a. $Y = 4X - 7$.

42. Fie v.a. independente: $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ şi $Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2p + q & 12p^2 \end{pmatrix}$

   a) Aflaţi $p, q \in \mathbb{R}$
   b) Calculaţi valoarea medie şi dispersia v.a. $X, Y, XY, X^2 - 3Y^2$.

43. Să se determine k astfel încat funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} kx, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă X de tip continuu. Să se determine apoi funcţia de repartiţie corespunzătoare acestei variabile aleatoare. Calculaţi $P\left(\frac{1}{4} < X < 2\right)$ şi $P\left(\frac{1}{8} \leq X \leq 1\right)$. Calculaţi valoarea medie precum şi momentele şi momentele centrate de ordinul 2 şi 3.

44. Calculaţi valoarea medie, momentele de ordinul 2 şi 3, dispersia, abaterea medie pătratică şi momentele centrate de ordinul 2 şi 3 pentru v.a. de mai jos:

    (a) $X : \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & a & 0.4 \end{pmatrix}$

    (b) $X : \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 7 \\ 0.2 & b & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$

    (c) $X : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & p \end{pmatrix}$

    (d) $X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}}$ unde $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

    (e) $X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}}$ unde $f(x) = \begin{cases} 12(x^3 - 2x^2 + x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$

Rezumat modul

In acest modul s-au introdus notiunile de eveniment, probabilitate, operatii cu evenimente.S-au definit variabilele aleatoare de tip discret si continuu, functia de repartitie precum si caracteristicile numerice ale variabilelor aleatoare.

In cazul repartitiilor clasice, s-au precizat functiile de probabilitate si densitate de probabilitate si au fost calculate valorile medii si dispersiile acestor variabile aleatoare.

Bibliografie modul

1. Colectiv, Analiza matematica, Teoria Probabilitatilor si Algebra liniara aplicate in economie, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2008

2. Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj Napoca, 2012.